Отчет Ю.В. Элияшева, 2014 год.

1. результаты, полученные в этом году.

1. Вычислили кольцо когомологий для дополнения к набору вещественных координатных подпространств в $\mathbb{R}^n$ и дали явное описание двойственности Александера-Понтрягина между когомологиями дополнения такого набора и гомологиями его одноточечной компактификации. Мы показали, что существует изоморфизм между полными группами когомологий для дополнения к набору вещественных координатных подпространств и полными группами когомологий для дополнения к комплексификации этого набора. Данная работа основана на идеях, примененных В.М. Бухштабером и Т.Е. Пановым [1], для изучения топологии момент-угол многообразий и, как следствие, дополнений к наборам комплексных координатных подпространств. По результатам была подготовлена и отправлена в печать статья.

2. Вычислил смешанную структуру Ходжа на кольце когомологий для открытого гладкого торического многообразия и для дополнения в $\mathbb{C}^n$ к набору координатных комплексных подпространств. Пусть Z является набором координатных комплексных подпространств в $\mathbb{C}^n$. Кольцо когомологий $H^*(\mathbb{C}^n \setminus Z)$ было вычислено В.М. Бухштабером и Т.Е. Пановым [1], ими, из топологических соображений, была введена биградуировка на этом кольце. Так как $\mathbb{C}^n \setminus Z$ является квазипроективным комплексным многообразием на его когомологиях имеется смешанная структура Ходжа, т.е. заданы весовая фильтрация и фильтрация Ходжа. Мы вычислили смешанную структуру Ходжа на $H^*(\mathbb{C}^n \setminus Z)$, и показали, что она описывается в терминах указанной выше топологической биградуировки на $H^*(\mathbb{C}^n \setminus Z)$. По этому результату была подготовлена и отправлена в печать работа, результат был представлен на конференции "Topology of torus actions and its applications to geometry and combinatorics".

   Дополнения к наборам комплексных координатных подпространств, можно рассматривать как частный случай (открытого) торического многообразия. Группы когомологий гладких (открытых) торических многообразий были вычислены М. Францом [2], на них естественно возникает некоторая биградуировка, аналогичная случаю дополнений подпространств. Мы вычислили смешанную структуру Ходжа на когомологиях гладких (открытых) торических многообразий и показали, что она описывается в терминах упомянутой выше биградуировки. В данный момент мы ведем подготовку публикации по этому результату, результат был представлен на конференции "Topology of torus actions and its applications to geometry and combinatorics".

3. Вычислил когомологии Дольбо для момент-угол многообразий. Вычислил когомологии пучка голоморфных векторных полей на момент-угол многообразии, при выполнении некоторых условий общности комплексной структуры. Общая конструкция момент-угол многообразия была дана В.М. Бухштабером и Т.Е. Пановым [1]. Тот факт что момент-угол многообразия допускают комплексную структуру был открыт относительно недавно, различными авторами, см. например [3]. Два классических примера таких многообразий - это многообразие Хопфа, которое диффеоморфно $S^{2n+1} \times S^1$, и многообразие Калаби-Экманна, которое диффеоморфно $S^{2n+1} \times S^{2m+1}, n > 0, m > 0$. Они представляют собой классические примеры некелеровых многообразий. Комплексные структуры на момент-угол многообразиях можно рассматривать как обобщения комплексных структур на многообразиях Хопфа и Калаби-Экманна. Мы вычислили когомологии Дольбо для этих многообразий. В случае если для комплексной структуры выполняется некоторое условие общности, мы вычислили когомологии пучка голоморфных векторных полей на этих многообразиях. Данные результаты были представлены на конференциях "Topology of torus actions and its applications to geometry and combinatorics"и "Геометрия, Топология и Интегрируемость".

4. Предложили обобщение понятия амёбы и описали некоторые геометрические свойства этого объекта. Рассмотрим $(\mathbb{C}^*)^n$ — алгебраический тор. Пусть $P(z)$ некоторый многочлен Лорана в $(\mathbb{C}^*)^n$, а $V \subset (\mathbb{C}^*)^n$ гиперповерхность $P(z) = 0$. Имеется отображение $\mathrm{Log} : (\mathbb{C}^*)^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathrm{Log}(z_1, \ldots, z_n) = (\log|z_1|, \ldots, \log|z_n|)$, образ V при отображении Log называется амёбой V. Понятие амебы было введено в работе И.М. Гельфанда, А.В. Зелевинского, М.М. Капранова [4], и в дальнейшем было хорошо изучено. Известно, что компонен-

ты дополнения амёбы в $\mathbb{R}^n$ выпуклы, и геометрия этих компонент описывается в терминах многогранника Ньютона многочлена $P(z)$.

И.М. Кричевер [5] предложил следующее обобщение понятия амебы для случая комплексных кривых. Рассмотрим гладкую комплексную кривую C и $p_1, \ldots, p_m$ набор точек на ней. Пусть даны две мероморфных 1-формы ω_1, ω_2 на C такие, что они голоморфны вне $p_1, \ldots, p_m$, в $p_1, \ldots, p_m$ имеют полюса не более чем первого порядка, и интеграл $\int_\gamma \omega_i, i = 1, 2$ по любому циклу $\gamma \in H_1(C \setminus p_1 \cup \cdots \cup p_m, \mathbb{Z})$ является чисто мнимым числом. Тогда можно определить отображение

$$\mathrm{Log}_\omega : C \setminus p_1 \cup \cdots \cup p_m \to \mathbb{R}^2,$$

следующим образом

$$p \mapsto (\mathrm{Re} \int_{p_0}^{p} \omega_1, \mathrm{Re} \int_{p_0}^{p} \omega_2),$$

где $p, p_0 \in C \setminus p_1 \cup \cdots \cup p_m$, p_0 — произвольная фиксированная точка, заметим, что данное отображение корректно определено. Образ этого отображения называется обобщённой амебой, в работе И.М. Кричевера было доказано, что компоненты дополнения в $\mathbb{R}^2$ обобщённой амебы выпуклы и их геометрия кодируется, правильно определённым, многогранником Ньютона, так же ряд других свойств классических амёб имеет место и в обобщённом случае.

Мы предложили следующее общение данной ситуации на многомерный случай. Пусть V гладкое компактное комплексное многообразие размерности n, и D дивизор с нормальными пересечениями и гладкими неприводимыми компонентами. Выберем набор $\omega_1, \ldots, \omega_{n+1}$ замкнутых голоморфных 1-форм на $V \setminus D$, с логарифмическими особенностями вдоль D, таких, что интегралы $\int_\gamma \omega_i, i = 1, \ldots, n+1$ по любому циклу $\gamma \in H_1(V \setminus D, \mathbb{Z})$ являются чисто мнимыми числами. Тогда можно определить отображение

$$\mathrm{Log}_\omega : V \setminus D \to \mathbb{R}^{n+1},$$

следующим образом

$$p \mapsto (\mathrm{Re} \int_{p_0}^{p} \omega_1, \ldots, \mathrm{Re} \int_{p_0}^{p} \omega_{n+1}),$$

где $p, p_0 \in V \setminus D$, p_0 — произвольная фиксированная точка, заметим, что данное отображение корректно определено. Образ этого отображения мы назовем обобщённой амебой, мы показали, что компоненты дополнения в $\mathbb{R}^{n+1}$ обобщённой амебы выпуклы и их геометрия кодируется, правильно определённым, многогранником Ньютона, так же ряд других свойств классических амёб имеет место и в обобщённом случае. Сейчас мы готовым публикацию по данным результатам, результаты был предсталены мной на докладе на Семинаре по многомерному комплексному анализу (Семинар Витушкина) в МГУ.

2. опубликованные и поданные в печать работы.

1. Ю.В. Элияшев, Когомологии дополнения к набору вещественных координатных подпространств, подана в печать (Математический сборник).

2. Yu.V. Eliyashev,The mixed Hodge structure on complements of complex coordinate subspace arrangements, подана в печать (Moscow Mathematical Journal).

3. Участие в конференциях и школах. Участвовал в:

- Летней математической школе "Алгебра и геометрия", 25 - 31 июля, 2014, Ярославль;

- ICM Satellite Conference: Topology of torus actions and its applications to geometry and combinatorics, August 7 – 11, 2014, Daejeon, Republic of Korea;

- конференции "Геометрия, Топология и Интегрируемость"Сколковский Институт Науки и Технологий, 20-25 октября, 2014, Москва.

4. Работа в научных центрах и международных группах. С февраля по март я работал старшим преподавателем в Сибирского федерального университета. С марта по настоящее время постдок в Лаборатории алгебраической геометрии и её приложений НИУ Высшая школа экономики. Сотрудничаю с Лабораторией комплексного анализа и дифференциальных уравнений Сибирского федерального университета.

5. Педагогическая деятельность. С февраля по март 2014 год я вел семинарские занятия по курсу теории функции комплексного переменного и семинар для младших курсов по введению в алгебраическую топологию в институте математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета, с сентября по настоящее время я веду практические занятия по курсу комплексного анализа на математическом факультете Высшей школы экономики.

Литература

[1] В.М. Бухштабер, Т.Е. Панов, Торические действия в топологии и комбинаторике, М., МЦНМО, 2004.

[2] M. Franz, “The Integral Cohomology of Toric Manifolds”, Геометрическая топология, дискретная геометрия и теория множеств, Сборник статей, Тр. МИАН, 252, Наука, М., 2006, 61–70

[3] T. Panov, Yu. Ustinovsky, “Complex-analytic structures on moment-angle manifolds”, Mosc. Math. J., 12:1 (2012), 149–172

[4] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, A.V. Zelevinsky, Discriminants, resultants and multidimensional determinants, Birkhauser, Boston, 1994, vii + 523 pp.

[5] I.Krichever, Amoebas, Ronkin function and Monge-Ampere measures of algebraic curves with marked points, arXiv:1310.8472