Отчет Ю.В. Элияшева, 2015 год.

1. результаты, полученные в этом году.

Исследовал свойства обощеных амёб:

Дадим определение понятия (обычной) амёбы. Рассмотрим $(\mathbb{C}^*)^m$ — алгебраический тор. Пусть $P(z)$ некоторый многочлен Лорана в $(\mathbb{C}^*)^m$, а $V \subset (\mathbb{C}^*)^m$ гиперповерхность $P(z) = 0$. Имеется отображение

$$\mathrm{Log} : (\mathbb{C}^*)^m \to \mathbb{R}^m,$$

$$\mathrm{Log}(z_1, \dots, z_m) = (\log|z_1|, \dots, \log|z_m|),$$

образ V при отображении Log называется амёбой V, обозначим его $\mathcal{A}_V$. Понятие амебы было введено в работе И.М. Гельфанда, А.В. Зелевинского, М.М. Капранова [2], и в дальнейшем было хорошо изучено. Известно, что компоненты дополнения амёбы в $\mathbb{R}^m$ выпуклы, и геометрия этих компонент описывается в терминах многогранника Ньютона многочлена $P(z)$ [1].

И.М. Кричевер [3] предложил следующее обобщение понятия амебы для случая комплексных кривых. Рассмотрим гладкую комплексную кривую C и $p_1, \dots, p_s$ набор точек на ней. Пусть даны две мероморфных 1-формы ω_1, ω_2 на C такие, что они голоморфны вне $p_1, \dots, p_s$, а в $p_1, \dots, p_s$ имеют полюса не более чем первого порядка, и интеграл $\int_\gamma \omega_i, i = 1, 2$ по любому циклу $\gamma \in H_1(C \setminus p_1 \cup \dots \cup p_s, \mathbb{Z})$ является чисто мнимым числом. Тогда можно определить отображение

$$\mathrm{Log}_\omega : C \setminus p_1 \cup \dots \cup p_s \to \mathbb{R}^2,$$

следующим образом

$$p \mapsto (\mathrm{Re} \int_{p_0}^{p} \omega_1, \mathrm{Re} \int_{p_0}^{p} \omega_2),$$

где $p, p_0 \in C \setminus p_1 \cup \dots \cup p_s$, p_0 — произвольная фиксированная точка, заметим, что данное отображение корректно определено. Образ этого отображения называется обобщённой амебой, в работе И.М. Кричевера было доказано, что компоненты дополнения в $\mathbb{R}^2$ обобщённой амебы выпуклы и их геометрия кодируется, правильно определённым, многогранником Ньютона, так же ряд других свойств классических амёб имеет место и в обобщённом случае.

Я предложил следующее общение данной ситуации на многомерный случай. Пусть V гладкое компактное комплексное многообразие размерности n, и D дивизор с нормальными пересечениями и гладкими неприводимыми компонентами. Выберем набор $\omega_1, \ldots, \omega_m$ замкнутых голоморфных 1-форм на $V \setminus D$, с логарифмическими особенностями вдоль D, таких, что интегралы $\int_\gamma \omega_i, i = 1, \ldots, m$ по любому циклу $\gamma \in H_1(V \setminus D, \mathbb{Z})$ являются чисто мнимыми числами. Тогда можно определить отображение

$$\mathrm{Log}_\omega : V \setminus D \to \mathbb{R}^m,$$

следующим образом

$$p \mapsto (\mathrm{Re} \int_{p_0}^{p} \omega_1, \ldots, \mathrm{Re} \int_{p_0}^{p} \omega_m),$$

где $p, p_0 \in V \setminus D$, p_0 — произвольная фиксированная точка, заметим, что данное отображение корректно определено. Я нашёл необходимое и достаточное условие для существования таких форм ω в случае когда V является Кэлеровым многообразием. Образ отображения Log_ω назовем обобщённой амебой.

Важную роль в изучении обычных амёб играет отображение порядка и функция Ронкина. Пусть $V = \{z \in (\mathbb{C}^*)^m : P(z) = 0\}$ тогда отображение порядка $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_m)$ - это отображение из множества связных компонент $\mathbb{R}^m \setminus \mathcal{A}_v$ в $\mathbb{R}^m$, устроенное следующим образом

$$\nu_j(x) = \frac{1}{(2\pi i)^m} \int_{\mathrm{Log}^{-1}(x)} \frac{z_j \frac{\partial}{\partial z_j} P(z)}{P(z)} \frac{dz_1}{z_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dz_m}{z_m},$$

где x - это некоторая, не важно какая, точка из фиксированное связной компоненты $\mathbb{R}^m \setminus \mathcal{A}_v$. Одна из основных теорем (М. Форсберг, М. Пассаре, А.К. Цих [1]) в этой области утверждает, что выпуклая оболочка образа отображения порядка ν совпадает с многогранником Ньютона многочлена $P(z)$, а конус рецессии связной компоненты в $\mathbb{R}^m \setminus \mathcal{A}_v$ (т.е. максимальный конус содержащийся в этой связной компоненте), совпадает с нормальным конусом к многограннику Ньютона в точке $\nu(x)$, где x точка из этой связной компоненты. Функцией Ронкина называется функция вида

$$N_P(x) = \frac{1}{(2\pi i)^m} \int_{\mathrm{Log}^{-1}(x)} \mathrm{Log}|P(z)| \frac{dz_1}{z_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dz_m}{z_m},$$

её градиент на $\mathbb{R}^m \setminus \mathcal{A}_V$ совпадает с отображением порядка, $N_P(x)$ строго выпукла на $\mathcal{A}_V$, эта функция оказывается довольно полезной при изучении амёб.

Для обощенной амёбы, в случае когда $m = n + 1$ и выполняется ряд технических условия, я определил аналог функции Ронкина и отображения порядка, а так же доказал аналог вышеупомянутой теоремы М. Форсберга, М. Пассаре, А.К. Циха. Так же среди всего прочего было описано множество критических точек отображения Log_ω.

Сейчас я готовлю публикацию по данным результатам, результаты были представлены мной в докладах на конференции "Встреча поколений"и на конференции "Комплексный анализ и дифференциальные уравнения". Так же я занимаюсь изучения случая обощённых амёб при $m > n+1$, что соответствует обычным амёбам алгебраических множеств коразмерности больше чем 1.

2. опубликованные и поданные в печать работы.

Yu.V. Eliyashev,The mixed Hodge structure on complements of complex coordinate subspace arrangements, принята к печати (Moscow Mathematical Journal).

3. Участие в конференциях и школах.

- Конференция "Встреча поколений"фонда Дмитрия Зимина "Династия", 9–11 июня, 2015, Москва;
- 5-я Летняя школа по геометрическим методам математической физики, 23-26 июня, 2015, Красновидово, Московская область;
- Летняя математическая школа "Алгебра и геометрия", 25 - 31 июля, 2015, Ярославль;
- 39-ая междисциплинарная школа-конференция "Информационные технологии и системы 2015", 7 – 11 сентября, 2015, Сочи;
- Международная научная конференция "Комплексный анализ и дифференциальные уравнения", 5 - 9 октября, 2015, Санкт-Петербург.

4. Работа в научных центрах и международных группах. Сотрудничаю с Лабораторией комплексного анализа и дифференциальных уравнений Сибирского федерального университета.

Литература

[1] M. Forsberg, M. Passare, A. Tsikh, Laurent determinants and arangements of hyperplane amoebas, Advances in Math. 151 (2000), 45–70.

[2] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, A.V. Zelevinsky, Discriminants, resultants and multidimensional determinants, Birkhauser, Boston, 1994, vii + 523 pp.

[3] I.Krichever, Amoebas, Ronkin function and Monge-Ampere measures of algebraic curves with marked points, arXiv:1310.8472