Финальный отчет Ю.В. Элияшева, 2013-2016 год.

1. Полученные результаты. Первоначальная заявка на грант была посвящена изучению следующих двух вопросов.

1. Смешанные структуры Ходжа на дополнениях к наборам комплексных координатных плоскостей.

Пусть дан симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ на множестве $[n] = \{1, \ldots, n\}$, т.е. множество вершин $\mathcal{K}$ есть подмножество $[n]$. По симплициальному комплексу $\mathcal{K}$ построим набор комплексных координатных подпространств $Z_{\mathcal{K}}$ в $\mathbb{C}^n$:

$$Z_{\mathcal{K}} = \bigcup_{\sigma \notin \mathcal{K}} L_\sigma,$$

где объединение ведётся по всем наборам $\sigma = \{i_1, \ldots, i_k\}$ таким, что σ не задаёт симплекса в σ, а L_σ есть координатное подпространство вида

$$L_\sigma = \{z \in \mathbb{C}^n : z_{i_1} = \cdots = z_{i_k} = 0\}.$$

Любой набор координатных подпространств в $\mathbb{C}^n$ может быть задан при помощи подходящего симплициального комплекса $\mathcal{K}$.

Когомологии $\mathbb{C}^n \setminus Z_K$ были вычислены в Т.Е. Пановым и В.М. Бухштабером в терминах когомологий некоторой дифференциальной биградуированной алгебры $R_{\mathcal{K}}$, которая определятся комбинаторикой $\mathcal{K}$.

Теорема 1. *[1, Теорема 8.6] Имеет место изоморфизм колец когомологий*

$$H^*(\mathbb{C}^n \setminus Z_{\mathcal{K}}) \cong H^*(R_{\mathcal{K}}).$$

Поскольку алгебра $R_{\mathcal{K}}$ биградуированна, то мы получаем биградуировку на когомологиях $H^*(R_{\mathcal{K}})$ и соответственно на когомологиях $H^*(\mathbb{C}^n \setminus Z_{\mathcal{K}})$, эта биградуировка была введена в [1] исходя из топологических соображений.

Мы доказали, что эта же самая биградуировка возникает из комплексной геометрии. Для квазипроективного многообразия можно определить смешанную структуру Ходжа на его когомологиях. Смешанная структура Ходжа на X состоит из возрастающей весовой фильтрации W на когомологиях $H^s(X, \mathbb{Q})$,

$$0 = W_{s-1}H^s(X, \mathbb{Q}) \subset W_s H^s(X, \mathbb{Q}) \subset \cdots \subset W_{2s}H^s(X, \mathbb{Q}) = H^s(X, \mathbb{Q}),$$

и убывающей фильтрации Ходжа F на $H^s(X, \mathbb{C})$, таких что F индуцирует чистую структуру Ходжа веса r на комплексификации $Gr_r^W H_{\mathbb{Q}} = W_r/W_{r-1}$.

Мы вычислили смешанную структуру Ходжа для $\mathbb{C}^n \setminus Z_{\mathcal{K}}$.

Теорема 2. *Имеют место изоморфизмы*

$$F^k H^s(\mathbb{C}^n \setminus Z_{\mathcal{K}}, \mathbb{C}) \cong \bigoplus_{\substack{q \geq k \\ -p+2q=s}} H^{-p,2q}(R_{\mathcal{K}}) \otimes \mathbb{C},$$

$$W_r H^s(\mathbb{C}^n \setminus Z_{\mathcal{K}},) \cong \bigoplus_{\substack{2q \leq r \\ -p+2q=s}} H^{-p,2q}(R_{\mathcal{K}}) \otimes ,$$

здесь $H^{-p,2q}(R_{\mathcal{K}})$ *-это биградуированная компонента* $H^{-p+2q}(R_{\mathcal{K}})$.

Данный результат был опубликован Moscow Mathematical Journal Volume 16, Issue 3, July–September 2016. Мы анонсировали, аналогичный результат для общих торических многообразий, необязательно компактных. Дополнение к набору координатных плоскостей является частным случаем гладкого открытого торического многообразия. В случае когда торическое многообразие гладкое соответствующий результат может быть получен практически дословным повторением доказательства предыдущей теоремы, но мы не довели это до публикации.

2. Комплексные структуры на момент-угол многообразиях.

Основная часть нашей первончальной заявки на грант состояла в изучении комплексной геометрии на момент-угол многообразиях. Общая конструкция момент-угол многообразия возникла, видимо, впервые в торической топологии. Пусть Σ есть симплициальный веер двойственный некоторый простому многограннику P, тогда момент-угол многообразие возникает как множество уровня соответствующего моментного отображения в конструкции торического многообразия X_Σ через симплектическую редукцию. В этом случае момент-угол многообразие может быть реализовано как пересечение в $\mathbb{C}^n$ вещественных квадрик

$$a_{1j}|z_1|^2 + \cdots + a_{nj}|z_n|^2 = b_j,$$

где $j = 1, \ldots, m$, $a_{1j}, b_j \in \mathbb{R}$, числа m, a_{1j}, b_j определяются по многограннику P. То что на момент-угол многообразиях можно ввести структур комплексного многообразия было замечено относительно недавно, и в последнее десятилетие изучению этих комплексных структур посвящен ряд работ. Частные примеры таких структур дают хорошо известные многообразия Хопфа и Калаби-Экмана, первое из них диффеоморфно $S^{2n+1} \times S^1$, второе $S^{2n+1} \times S^{2m+1}, n > 0, m > 0$.

Опишем их конструкцию подробней. Пусть σ есть подмножество $[n]$, введём обозначение

$$D^2_\sigma \times S^1_{[n]\setminus\sigma} = \{|z_i| \leq 1, i \in \sigma, |z_i| = 1, i \notin \sigma\}.$$

Назовём пространство

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} D^2_{\sigma} \times S^1_{[n] \setminus \sigma}$$

момент-угол комлексом. Отметим, что $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \subset \mathbb{C}^n \setminus Z_{\mathcal{K}}$ и имеется деформационная ретракция $\mathbb{C}^n \setminus Z_{\mathcal{K}}$ на $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$. В случае если $\mathcal{K}$ есть некоторая триангуляция $m-$мерной сферы тогда $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ есть $(m+n)-$мерное топологическое многообразие. Пусть также дан полный симплициальный веер Σ, такой что его комбинаторика совпадает с комбинаторикой $\mathcal{K}$, т.е. можно построить взаимнооднозначное соответствие между конусами Σ и симплексами $\mathcal{K}$. Тогда имеется конструкция позволяющая ввести на $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ структуру гладкого многообразия.

Пусть $m+n$ — чётное, а симплициальному комплексу $\mathcal{K}$ соответствует некоторый веер Σ. В работе [2] вводится струкутра комплексного многообразия $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, там же были вычислены когомологии Дольбо для $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ в случае, когда $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ представляется в виде голоморфного расслоения со слоем компактный тор и базой гладкое торическое многообразие, однако не все комплексные структуры на этих многообразиях допускают такое представление.

Мы вычислили когомологий Дольбо $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ в общем случае. Это вычисление дается в терминах когомологий некоторой подалгебры алгебры $R_{\mathcal{K}}$. Также мы вычислили когомлогии пучка голоморфных векторных полей, он тоже могут быть описаны в терминах $R_{\mathcal{K}}$. (Напомним что алгебра $R_{\mathcal{K}}$ использовалась для вычисления обычных когомологий $\mathbb{C}^n \setminus Z_K$, поскольку $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ является деформационным ретрактом $\mathbb{C}^n \setminus Z_K$, их кольца когомологий совпадают.) Мы подготовили публикацию, препринт которой будет выложен в ближайшее время. Не на все вопросы связанные с комплексными структурами на $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, изучение которые мы анонсировали в заявке на грант, мы смогли получит ответы.

3. Геометрия обобщенных амёб.

В последние два года мой основной исследовательский интерес был сосредоточен на изучении обобщенных амёб и тропической геометрии.

Дадим определение понятия (обычной) амёбы. Рассмотрим $(\mathbb{C}^*)^m$ — алгебраический тор. Пусть $P(z)$ некоторый многочлен Лорана в $(\mathbb{C}^*)^m$, а $V \subset (\mathbb{C}^*)^m$ гиперповерхность $P(z) = 0$. Имеется отображение

$$\mathrm{Log} : (\mathbb{C}^*)^m \to \mathbb{R}^m,$$

$$\mathrm{Log}(z_1, \ldots, z_m) = (\log|z_1|, \ldots, \log|z_m|),$$

образ V при отображении Log называется амёбой V, обозначим его $\mathcal{A}_V$. Понятие амебы было введено в работе И.М. Гельфанда, А.В. Зелевинского, М.М. Капранова [3], и в дальнейшем было хорошо изучено. Известно, что компоненты дополнения амёбы в $\mathbb{R}^m$ выпуклы, и геометрия этих компонент описывается в терминах многогранника Ньютона многочлена $P(z)$ [4].

И.М. Кричевер [5] предложил следующее обобщение понятия амебы для случая комплексных кривых. Рассмотрим гладкую комплексную кривую C и $p_1, \dots, p_s$ набор точек на ней. Пусть даны две мероморфных 1-формы ω_1, ω_2 на C такие, что они голоморфны вне $p_1, \dots, p_s$, а в $p_1, \dots, p_s$ имеют полюса не более чем первого порядка, и интеграл $\int_\gamma \omega_i, i = 1, 2$ по любому циклу $\gamma \in H_1(C \setminus p_1 \cup \dots \cup p_s, \mathbb{Z})$ является чисто мнимым числом. Тогда можно определить отображение

$$\mathrm{Log}_\omega : C \setminus p_1 \cup \dots \cup p_s \to \mathbb{R}^2,$$

следующим образом

$$p \mapsto (\mathrm{Re} \int_{p_0}^{p} \omega_1, \mathrm{Re} \int_{p_0}^{p} \omega_2),$$

где $p, p_0 \in C \setminus p_1 \cup \dots \cup p_s$, p_0 — произвольная фиксированная точка, заметим, что данное отображение корректно определено. Образ этого отображения называется обобщённой амебой, в работе И.М. Кричевера было доказано, что компоненты дополнения в $\mathbb{R}^2$ обобщённой амебы выпуклы и их геометрия кодируется, правильно определённым, многогранником Ньютона, так же ряд других свойств классических амёб имеет место и в обобщённом случае.

Мы предложили следующее общение данной ситуации на многомерный случай. Пусть V гладкое компактное комплексное многообразие размерности n, и D дивизор с нормальными пересечениями и гладкими неприводимыми компонентами. Выберем набор $\omega_1, \dots, \omega_m$ замкнутых голоморфных 1-форм на $V \setminus D$ с логарифмическими особенностями вдоль D таких, что интегралы $\int_\gamma \omega_i, i = 1, \dots, m$ по любому циклу $\gamma \in H_1(V \setminus D, \mathbb{Z})$ являются чисто мнимыми числами. Тогда можно определить отображение

$$\mathrm{Log}_\omega : V \setminus D \to \mathbb{R}^m,$$

следующим образом

$$p \mapsto (\mathrm{Re} \int_{p_0}^{p} \omega_1, \dots, \mathrm{Re} \int_{p_0}^{p} \omega_m),$$

где $p, p_0 \in V \setminus D$, p_0 — произвольная фиксированная точка, заметим, что данное отображение корректно определено. Мы нашли необходимое и достаточное условие для существования таких форм ω в случае когда V является Кэлеровым многообразием. Образ отображения Log_ω назовем обобщённой амебой.

Важную роль в изучении обычных амёб играет отображение порядка и функция Ронкина. Пусть $V = \{z \in (\mathbb{C}^*)^m : P(z) = 0\}$ тогда отображение порядка $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_m)$ - э то отображение из множества связных компонент $\mathbb{R}^m \setminus \mathcal{A}_v$ в $\mathbb{R}^m$, которое устроено следующим образом

$$\nu_j(x) = \frac{1}{(2\pi i)^m} \int_{\mathrm{Log}^{-1}(x)} \frac{z_j \frac{\partial}{\partial z_j} P(z)}{P(z)} \frac{dz_1}{z_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dz_m}{z_m},$$

где x - это некоторая, не важно какая, точка из фиксированное связной компоненты $\mathbb{R}^m \setminus \mathcal{A}_v$. Одна из основных теорем (М. Форсберг, М. Пассаре, А.К. Цих [4]) в этой области утверждает, что выпуклая оболочка образа отображения порядка ν совпадает с многогранником Ньютона многочлена $P(z)$, а конус рецессии связной компоненты в $\mathbb{R}^m \setminus \mathcal{A}_v$ (т.е. максимальный конус содержащийся в этой связной компоненте), совпадает с нормальным конусом к многограннику Ньютона в точке $\nu(x)$, где x точка из этой связной компоненты. Функцией Ронкина называется функция вида

$$N_P(x) = \frac{1}{(2\pi i)^m} \int_{\mathrm{Log}^{-1}(x)} \mathrm{Log}|P(z)| \frac{dz_1}{z_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dz_m}{z_m},$$

её градиент на $\mathbb{R}^m \setminus \mathcal{A}_V$ совпадает с отображением порядка, $N_P(x)$ строго выпукла на $\mathcal{A}_V$, эта функция оказывается полезной при изучении амёб.

Для обощенной амёбы, в случае когда $m = n + 1$ и выполняется ряд технических условия, мы определили аналог функции Ронкина и отображения порядка, а так же доказали аналог вышеупомянутой теоремы М. Форсберга, М. Пассаре, А.К. Циха. Так же среди всего прочего было описано множество критических точек отображения Log_ω. Была подготовлена публикация по этим исследованиями, препринт выложен на arxiv.org (arXiv:1608.06077), в скором времени мы планируем отправить её в печать.

Последних полгода мои исследования были посвящены попытке построить теорию Ходжа на тропических многообразиях. Недавно была построена теория когомологий на тропических многообразиях и аналог когогомологий де Рама на тропических многообразиях [6],[7]. На "хороших"тропических многообразиях эти когомологии ведут себя хорошим образом, т.е. как когомологии гладких проективных комплексных многообразий. Возник соблазн построить аналоги теории Ходжа для когомологий трропических многобразий по аналогии с тем как это делается на кэлеровых комплексных многообразия. На этом пути пока удалось достигнуть только некоторых частичных и предварительных результатов, и пока имеется много технических проблем. Однако, мы надеемся, что мы достигнем успеха в этих исследованиях.

2. Опубликованные работы и преринты.

1. Yu.V. Eliyashev, Mixed Hodge structure on complements of complex coordinate subspace arrangements, Moscow Mathematical Journal, Volume 16, Issue 3.

2. Yu.V. Eliyashev, Geometry of generalized amoebas, препринт arXiv:1608.06077

3. Участие в конференциях и школах.

- 6-ая Летняя школа по геометрическим методам математической физики, июнь 2016, Красновидово, Московская область;

- Летняя математическая школа "Алгебра и геометрия", июль 2016, Ярославль;

- 9-ая Европейская летняя школа по финансовой математике, 29 августа - 2 сентября 2016, Санкт-Петербург.

4. Работа в научных центрах и международных группах. Сотрудничаю с Лабораторией комплексного анализа и дифференциальных уравнений Сибирского федерального университета.

Список литературы

[1] Бухштабер В.М., Панов Т.Е. Торические действия в топологии и комбинаторике, М., МЦНМО, 2004, 272 с.

[2] T. Panov, Yu. Ustinovsky, “Complex-analytic structures on moment-angle manifolds”, Mosc. Math. J., 12:1 (2012), 149–172

[3] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, A.V. Zelevinsky, Discriminants, resultants and multidimensional determinants, Birkhauser, Boston, 1994, vii + 523 pp.

[4] M. Forsberg, M. Passare, A. Tsikh, Laurent determinants and arangements of hyperplane amoebas, Advances in Math. 151 (2000), 45–70.

[5] I.Krichever, Amoebas, Ronkin function and Monge-Ampere measures of algebraic curves with marked points, arXiv:1310.8472

[6] Ilia Itenberg, Ludmil Katzarkov, Grigory Mikhalkin, Ilia Zharkov, Tropical Homology, arXiv:1604.01838

[7] Philipp Jell, Kristin Shaw, Jascha Smacka, Superforms, Tropical Cohomology and Poincare Duality, arXiv:1512.07409