

ОТЧЕТ ЗА 2015 ГОД ПО ГРАНТУ ФОНДА ДИНАСТИЯ

Евгений Фейгин

Результаты

Результаты, полученные нами в 2015 году можно разбить на две части: геометрические результаты о структуре колчаных грассманианов и алгебраические результаты о несимметрических полиномах Макдональда и их связи с теорией представлений алгебр токов.

Колчаные грассманианы являются проективными алгебраическими многообразиями. Колчаный грассманиан задаётся представлением колчана и вектором размерности. Частными случаями таких многообразий являются классические грассманианы и многообразия флагов. В наших предыдущих работах с М.Райнеке и Дж.Черулли Ирелли нами был изучен класс колчаных грассманианов, обладающих важными и интересными алгебро-геометрическими и комбинаторными свойствами. Результаты, полученные в этом году, показывают, что для однонаправленного колчана типа A изученные ранее колчаные грассманианы естественным образом вкладываются в семейство многообразий, каждое из которых, с одной стороны, является колчаным грассманианом, а, с другой стороны, изоморфны многообразиям Шуберта для групп Ли типа A .

В 2012 году И.Чередник и Д.Орр сформулировали гипотезу о связи специализаций в $t = \infty$ несимметрических полиномов Макдональда и характеристик представлений алгебр токов, являющихся подалгебрами в аффинных алгебрах Каца-Мути. Эта гипотеза важна как для изучения комбинаторики, связанной с теорией несимметрических полиномов Макдональда, так и для теории представлений. В этом году нами было получен ряд результатов, проясняющих связь между полиномами Макдональда и теорией представлений. С одной стороны, мы доказали гипотезу Чередника-Орра в ряде частных случаев. С другой стороны, нами была предложена конструкция новых представлений, позволяющих на уровне представлений работать с комбинаторными структурами, возникающими при изучении несимметрических полиномов Макдональда.

Статьи

- [1] With I.Makedonskyi
Nonsymmetric Macdonald polynomials, Demazure modules and PBW filtration,
Journal of Combinatorial Theory, Series A, pp. 60–84, 2015.

The Cherednik-Orr conjecture expresses the $t \rightarrow \infty$ limit of the nonsymmetric Macdonald polynomials in terms of the PBW twisted characters of the affine level one Demazure modules. We prove this conjecture in several special cases.

- [2] With I. Cherednik
Extremal part of the PBW-filtration and E-polynomials,
Advances in Mathematics, Volume 282, Pages 220–264.

Given a reduced irreducible root system, the corresponding nil-DAHA is used to calculate the extremal coefficients of nonsymmetric Macdonald polynomials in the limit $t \rightarrow \infty$ and for antidominant weights, which is an important ingredient of the new theory of nonsymmetric q -Whittaker function. These coefficients are pure q -powers and their degrees are expected to coincide in the untwisted setting with the extremal degrees of the so-called PBW-filtration in the corresponding finite-dimensional irreducible representations of the simple Lie algebras for any root systems. This is a particular case of a general conjecture in terms of the level-one Demazure modules. We prove this coincidence for all Lie algebras of classical type and for G_2 , and also establish the relations of our extremal degrees to minimal q -degrees of the extremal terms of the Kostant q -partition function; they coincide with the latter only for some root systems.

[3] With G. Cerulli Irelli and M. Reineke
Schubert Quiver Grassmannians
arXiv:1508.00264, *submitted*

Quiver Grassmannians are projective varieties parametrizing subrepresentations of given dimension in a quiver representation. We define a class of quiver Grassmannians generalizing those which realize degenerate flag varieties. We show that each irreducible component of the quiver Grassmannians in question is isomorphic to a Schubert variety. We give an explicit description of the set of irreducible components, identify all the Schubert varieties arising, and compute the Poincaré polynomials of these quiver Grassmannians.

[4] With I. Makedonskyi
Weyl modules for $\mathfrak{osp}(1, 2)$ and nonsymmetric Macdonald polynomials
arXiv:1507.01362 *submitted*

The main goal of our paper is to establish a connection between the Weyl modules of the current Lie superalgebras (twisted and untwisted) attached to $\mathfrak{osp}(1, 2)$ and the nonsymmetric Macdonald polynomials of types $A_2^{(2)}$ and $A_2^{(2)\dagger}$. We compute the dimensions and construct bases of the Weyl modules. We also derive explicit formulas for the $t = 0$ and $t = \infty$ specializations of the nonsymmetric Macdonald polynomials. We show that the specializations can be described in terms of the Lie superalgebras action on the Weyl modules.

Конференции и семинары

- [1] Conference "Enveloping Algebras and Geometric Representation Theory Oberwolfach, 10 May – 16 May, 2015.
- [2] Workshop "On the Interaction of Representation Theory with Geometry and Combinatorics Bonn, 22 May – 02 April, 2015.
Talk "Abelianization and affine Grassmannians".
- [3] Workshop "Aspects of Lie theory Rome, Italy, January 7–10, 2015.
- [4] International summer school "Theoretical problems of physics of fundamental interactions Zelenogorsk, 19 July – 31 July, 2015.
Talk "Solitons, vertex operators and symmetries".
- [5] Summer school "Lie algebras, algebraic groups and invariants theory Samara, 22 June – 27 June, 2015.

Talk “Poincare-Birkhoff-Witt filtration and flag varieties”

Преподавание

[1] Affine Lie algebras and applications, from 2nd year to PhD students, September-December 2015, 2 hours per week.

Program

Affine Lie algebras form one of the most well-known and popular classes of infinite-dimensional Lie algebras. During the last 20 years, they attracted attention of many mathematicians throughout the world due to the beautiful and rich structure theory and representation theory. The theory of affine Kac-Moody Lie algebras has important applications in the number theory, algebraic geometry and in mathematical physics.

Program:

1. Simple Lie algebras.
2. Affine Kac-Moody Lie algebras: basic definitions.
3. Affine Kac-Moody Lie algebras: integrable representations.
4. Affine \mathfrak{sl}_2 : representations and theta functions.
5. Boson-fermion correspondence and Schur polynomials.
6. Affine algebras, theta functions and modular forms.
7. Vertex operator construction of representations.

Textbooks:

1. Kac, V. Infinite dimensional Lie algebras, Cambridge University Press (1994).
2. Kac V., Raina A. Bombay lectures on Highest weight representations of infinite-dimensional Lie algebras (WS, 1987)
3. Pressley, A., Segal, G. (1986), Loop groups.
4. Di Francesco, P., Mathieu, P., Senechal, D. (1997), Conformal Field Theory, Springer-Verlag.
5. Kumar, S., Kac-Moody Groups, their Flag Varieties and Representation Theory, 2012, Springer.