

## ОТЧЕТ ЗА 2014 ГОД ПО ГРАНТУ ФОНДА ДИНАСТИЯ

Евгений Фейгин

### Результаты

В 2014 году нами были получены новые результаты о структуре градуированных представлений алгебр Ли и соответствующих многообразиях флагов. Градуировка, о которой идёт речь, происходит из фильтрации Пуанкаре-Биркгофа-Витта на универсальной обёртывающей алгебре. Присоединённая градуированная алгебра для ПБВ фильтрации коммутативна; таким образом, изучаемые нами объекты снабжены действием абелевой алгебры (для представлений) или абелевой унипотентной группы (для алгебраических многообразий). Изучение этих действий помогает лучше понять соответствующие математические объекты и описать их свойства.

Основной алгебраический результат, полученный нами в 2014 году, это доказательство в нескольких частных случаях гипотезы Чередника-Орра. Эта гипотеза устанавливает связь между характеристиками ПБВ градуированных модулей Демазюра для аффинных алгебр Каца-Мути и несимметрическими полиномами Макдональда. При доказательстве была использована комбинаторная формула Хагlund-Хаймана-Лоера для несимметрических полиномов Макдональда и конструкция базисов, согласованных с ПБВ фильтрацией, в специальных модулях Демазюра для алгебр типа  $A$ .

Наш основной геометрический результат состоит в описании вырожденных аффинных грассманианов. Мы получили явное описание этих бесконечномерных многообразий в терминах линейной алгебры, а также отождествили их со специальными подмногообразиями в аффинных грассманианах для аффинных алгебр Каца-Мути большего ранга. Нами были построены конечномерные аппроксимации вырожденных аффинных грассманианов. Соответствующие конечномерные алгебраические многообразия описаны в терминах колчаных грассманианов для петлевых колчанов.

### Статьи

- [1] With G. Cerulli Irelli and M. Reineke  
Homological approach to the Hernandez-Leclerc construction and quiver varieties,  
Representation Theory 2014, no. 18, pp.1–14.

In a previous paper the authors have attached to each Dynkin quiver an associative algebra. The definition is categorical and the algebra is used to construct desingularizations of arbitrary quiver Grassmannians. In the present paper we prove that this algebra is isomorphic to an algebra constructed by Hernandez-Leclerc defined combinatorially and used to describe certain graded Nakajima quiver varieties. This approach is used to get an explicit realization of the orbit closures of representations of Dynkin quivers as affine quotients.

- [2] With M. Finkelberg and P. Littelmann  
Symplectic Degenerate Flag Varieties,  
Canadian Journal of Mathematics. 2014. Vol.66. No. 6, P. 1250-1286

Let  $F_\lambda^a$  be the degenerate symplectic flag variety. These are projective singular irreducible  $\mathbb{G}_a^M$  degenerations of the classical flag varieties for symplectic group  $Sp_{2n}$ . We give an explicit construction for the varieties  $F_\lambda^a$  and construct their desingularizations, similar to the Bott-Samelson resolutions in the classical case. We prove that  $F_\lambda^a$  are normal locally complete intersections with terminal and rational singularities. We also show that these varieties are Frobenius split. Using the above mentioned results, we prove an analogue of the Borel-Weil-Bott theorem and obtain a q-character formula for the characters of irreducible  $Sp_{2n}$ -modules via the Atiyah-Bott-Lefschetz fixed points formula.

- [3] With M. Finkelberg and M. Reineke  
Degenerate affine Grassmannians and loop quivers  
arXiv:1410.0777, *submitted*

We study the connection between the affine degenerate Grassmannians in type A, quiver Grassmannians for one vertex loop quivers and affine Schubert varieties. We give an explicit description of the degenerate affine Grassmannian of type  $GL_n$  and identify it with semi-infinite orbit closure of type  $A_{2n-1}$ . We show that principal quiver Grassmannians for the one vertex loop quiver provide finite-dimensional approximations of the degenerate affine Grassmannian. Finally, we give an explicit description of the degenerate affine Grassmannian of type  $A_1^{(1)}$ , propose a conjectural description in the symplectic case and discuss the generalization to the case of the affine degenerate flag varieties.

- [4] With I. Makedonskyi  
Nonsymmetric Macdonald polynomials, Demazure modules and PBW filtration  
arXiv:1407.6316 *submitted*

The Cherednik-Orr conjecture expresses the  $t \rightarrow \infty$  limit of the nonsymmetric Macdonald polynomials in terms of the PBW twisted characters of the affine level one Demazure modules. We prove this conjecture in several special cases.

### Конференции и семинары

- [1] Summer school/PhD-workshop on PBW filtrations of modules for Lie algebras and their appearance/applications in Representation Theory, Glasgow, UK, May 19-23, 2014.  
Talk "PBW filtration - representations and flag varieties open questions"
- [2] Conference "Lie algebras, algebraic groups and invariant theory", Moscow, January, 27 – February, 1  
Talk "Representations of nilpotent algebras, Vinbergs polytopes and generalized flag varieties"
- [3] Visit to Glasgow and Edinburgh, UK, October 2014  
Talk "Affine degenerate flag varieties and Sato Grassmannians" (University of Glasgow)  
Talk "PBW filtration and nonsymmetric Macdonald polynomials" (University of Edinburgh)

### Преподавание

[1] Infinite dimensional Lie algebras and vertex operator algebras, from 2nd year to PhD students, September-December 2014, 2 hours per week.

#### Program

The theory of Lie groups and Lie algebras is one of the central areas of modern mathematics. It has various interrelations with algebraic geometry, combinatorics, theory of symmetric functions, integrable systems, classical and quantum field theories. Lie groups and Lie algebras usually show up as the sets of symmetries of objects of a theory. For example, infinite-dimensional Lie algebras (such as affine Kac-Moody algebras) turn out to be very important for the description of many quantum field theories: namely, they are realized as symmetries of the spaces of states. Infinite-dimensional Lie algebras also play an important role in the theory of integrable systems and in algebraic geometry. It turns out that it is very natural in this context to consider more general algebraic objects, the vertex operator algebras. VOAs capture the main properties of the Lie algebras and have rich additional structure. Vertex operator algebras proved to be very useful in many situations; the classical example is the KP integrable hierarchy. They are also extensively used in modern algebraic geometry. Our goal is to give an introduction to the theory of infinite-dimensional Lie algebras and vertex operator algebras. We describe the main definitions, constructions and applications of the theory.