

ОТЧЁТ О НАУЧНОЙ И ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПО ГРАНТУ ФОНДА “ДИНАСТИЯ” ЗА 2016 ГОД

Харитонов Михаил Игоревич

В этом году исследовал возможности применения алгоритмических методов и комбинаторики в теории колец. В частности, из теоремы Ширшова вытекает положительное решение проблемы А. Г. Куроша и других проблем бернсайдовского типа для PI-колец, т. к. если Y — базис Ширшова, и все элементы из Y — алгебраичны, то алгебра A конечномерна. Тем самым теорема Ширшова даёт явное указание множества элементов, алгебраичность которых ведёт к конечномерности всей алгебры. В силу ограниченности высоты в смысле Ширшова любое длинное слово есть произведение периодических частей и “прокладок” ограниченной длины. Для тонкого изучения таких слов вводится понятие существенной высоты, которая и есть число таких периодических кусков, в то время как обычная ещё учитывает “прокладки”. Как ни странно, существенную высоту удобно оценивать с помощью полилинейных слов и их n -разбиваемости, где полилинейным называется слово, в которое каждая буква входит не более одного раза. Значение понятия n -разбиваемости выходит за рамки проблематики, относящейся к проблемам бернсайдовского типа. Оно играет роль и при изучении полилинейных слов, в оценке их количества. В частности, количество полилинейных слов длины l над l -буквенным алфавитом, не являющихся 3-разбиваемыми, равно k -му числу Каталана. В свою очередь, с помощью чисел Каталана можно показать биекцию между множествами перестановок, избегающими паттерн 321, паттерн 132 и паттерн 231. Также к теории высоты в смысле Ширшова применима проблематика рамсеевского типа. Ранее использовались методы динамического программирования для перечисления не n -разбиваемых полилинейных слов. Подготовлен черновик обзора по теме “Алгоритмические методы и комбинаторика слов в теории колец”.

Вёл занятия зимней олимпиадной школе и зимней компьютерной школе на базе физтех-лицея.

ИТОГИ ЗА ТРИ ГОДА

Планировалось развитие аппарата, разработанного автором при доказательстве теоремы Ширшова. Данный аппарат даёт новые перспективы в различных вопросах PI-теории и комбинаторики последовательностей. Предполагалось дальнейшее развитие этих идей. В перспективе данное исследование ведёт к получению соизмеримых верхней и нижней оценок высоты PI-алгебр.

Шпехт поставил проблему существования бесконечно базируемого многообразия ассоциативных алгебр над полем характеристики 0. Решение проблемы Шпехта для нематричного случая представлено в докторской диссертации В. Н. Латышева. Рассуждения В. Н. Латышева

основывались на применении техники частично упорядоченных множеств. В. Н. Латышев поставил проблему конечной базирюемости множества старших полилинейных слов для T -идеала относительно взятия надслов и изотонных подстановок. Из этой проблемы вытекает полилинейный случай проблемы конечной базирюемости для алгебр над полем конечной характеристики. Наиболее важной обструкцией является обструкция $x_n x_{n-1} \dots x_1$, её изотонные образы составляют множество не n -разбиваемых слов. В связи с этими вопросами возникает проблема: “Перечислить количество полилинейных слов, отвечающих данному конечному набору обструкций. Доказать элементарность соответствующей производящей функции.” Были получены оценки на количество изотонных образов обструкции $x_n x_{n-1} \dots x_1$ в полилинейном случае. Данные оценки также приближают к точным оценкам на высоту в смысле Ширшова (как со стороны существенной высоты, так и со стороны индекса нильпотентности).

Первоначальное доказательство А. И. Ширшова хотя и было чисто комбинаторным (оно основывалось на технике элиминации, развитой им в алгебрах Ли, в частности, при доказательстве теоремы о свободе), однако давало только упрощённые рекурсивные оценки. В 1981 г. А. Т. Колотов получил двойную экспоненту в качестве оценки. В 1992 г. А. Я. Белов показал, что в реальности высота растёт не более чем экспоненциально. Улучшенные экспоненциальные оценки были получены А. Клейном (2000) и А. А. Лопатыным (2011). С другой стороны, существующие нижние оценки высоты не более чем квадратичны. В 2012 г. мною и А. Я. Беловым была получена оценка высоты в теореме Ширшова, линейная по числу образующих и имеющая субэкспоненциальный рост ($n^{\log n}$) по степени тождества, что явилось ответом на вопрос Е. И. Зельманова, поставленный в Днестровской тетради. Были исследованы возможности получения полиномиальных оценок (в частности, перевод на язык графов, по структуре близких к графам Розы). К сожалению, полиномиальную оценку высоты получить не удалось, но сложилось впечатление, что точная оценка является именно полиномиальной, а не субэкспоненциальной. Полученные оценки составили основу диссертации на соискание степени кандидата физико-математических наук.