ОТЧЕТ
Масловой Натальи Владимировны
за 2014 г.

Основные результаты:

1. *Получено описание всех случаев совпадения графов Грюнберга–Кегеля конечной простой группы и ее собственной подгруппы.*

Спектром конечной группы G называется множество $\omega(G)$ порядков всех ее элементов. Множество всех простых чисел, входящих в спектр группы G, называется *простым спектром группы* G и обозначается через $\pi(G)$. Спектр $\omega(G)$ определяет *граф простых чисел* (или *граф Грюнберга–Кегеля*) $\Gamma(G)$ группы G, вершинами которого являются простые числа из $\pi(G)$, и две различные вершины r и s смежны тогда и только тогда, когда число rs принадлежит множеству $\omega(G)$.

Легко понять, что если H — подгруппа конечной группы G, то $\pi(H)$ является подмножеством $\pi(G)$ и $\Gamma(H)$ является подграфом $\Gamma(G)$. Конечная группа G называется *минимальной относительно простого спектра* (соответственно *минимальной относительно графа Грюнберга–Кегеля*), если $\pi(G) \neq \pi(H)$ (соответственно $\Gamma(G) \neq \Gamma(H)$) для любой собственной (эквивалентно, для любой максимальной) подгруппы H из G.

Во время беседы, имевшей место на Международной конференции по теории групп, посвященной 70-летию В.Д. Мазурова (г. Новосибирск, июль 2013 г.), Кристофер Паркер (Великобритания) обратил мое внимание на исследование вопроса о совпадении графов Грюнберга–Кегеля конечной группы и ее собственной подгруппы. Этот вопрос был решен мною для конечных простых групп.

Легко понять, что конечная группа, минимальная относительно простого спектра, минимальна относительно графа Грюнберга–Кегеля. Основной массив конечных простых групп входит в класс групп, минимальных относительно простого спектра, как это вытекает из результата М. Либека, Ч. Прэгер и Я. Саксла, однако существует пять бесконечных серий и несколько отдельных конечных простых групп, которые не минимальны относительно простого спектра (более подробно см. Liebeck M.W., Praeger C.E., Saxl J., Transitive subgroups of primitive permutation groups, J. Algebra. 2000. Vol. 234. P. 291–361). С использованием указанного результата мною было получено описание всех случаев совпадения графа Грюнберга–Кегеля конечной простой группы и ее собственной подгруппы. Доказана следующая

Теорема. *Пусть G — конечная простая группа и H — ее собственная подгруппа. Тогда $\Gamma(G) = \Gamma(H)$ в том и только в том случае, когда выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) $G = A_n$, *где n и $n-4$ — нечетные непростые числа, и* $H \cong A_{n-1}$;

(2) $G = PSp_4(q)$ *и* $H \cong PSL_2(q^2).\langle t\rangle$, *где q четно и t — полевой автоморфизм порядка* 2 *группы* $PSL_2(q^2)$;

(3) $G = PSp_8(2^w)$ *и* $H \cong SO_8^-(2^w)$;

(4) $G = P\Omega_8^+(q)$ *и* $H \cong P\Omega_7(q)$;

(5) $G = PSL_6(2)$ *и H — стабилизатор подпространства размерности* 1 *или* 5 *естественного проективного модуля группы* G;

(6) $G = A_6$ *и* $H \cong A_5$;

(7) $G = A_{10}$ *и* $H \cong (S_7 \times S_3) \cap A_{10}$;

(8) $G = PSU_4(2) \cong PSp_4(3)$ *и* $H \in \{2^4 : A_5, S_6, S_5\}$;
(9) $G = PSp_6(2)$ *и* $H \cong S_8$;
(10) $G = PSU_4(3)$ *и* $H \cong A_7$;
(11) $G = G_2(3)$ *и* $H \cong PSL_2(13)$;
(12) $G = M_{11}$ *и* $H \cong PSL_2(11)$;
(13) $G \cong P\Omega_8^+(2)$ *и* $H \in \{2^6 : A_8, A_9, S_8\}$.

Критерий совпадения графов Грюнберга–Кегеля конечной простой знакопеременной группы и ее собственной подгруппы получен по модулю расширенной бинарной гипотезы Гольдбаха, для остальных конечных простых групп критерий от нее не зависит.

Результат был опубликован в [1] (см. список основных опубликованных и представленных к печати работ) в марте 2014 г., 30 июля 2014 г. аналогичный результат (с иным доказательством) был размещен на сайте arXiv алгебраистами из Великобритании Тимоти Бёрнсом и Элисой Ковато (см. arXiv:1407.8128).

2. *Решена проблема реализуемости обыкновенного графа, имеющего не более 5 вершин, как графа Грюнберга–Кегеля конечной группы* (*совместно с А.Л. Гаврилюком, А.С. Кондратьевым и И.В. Храмцовым*).

Граф Грюнберга-Кегеля $\Gamma(G)$ конечной группы G можно понимать как некоторый абстрактный граф на $|\pi(G)|$ вершинах, все вершины которого помечены различными простыми числами из $\pi(G)$ так, что две различные вершины, помеченные простыми числами p и q, связаны тогда и только тогда, когда группа G содержит элемент порядка pq. В связи с таким определением графа Грюнберга-Кегеля группы возникает следующий вопрос: можно ли пометить вершины заданного конечного графа различными простыми числами так, что полученный помеченный граф будет графом Грюнберга-Кегеля некоторой конечной группы? Из теоремы Грюнберга-Кегеля и результатов Уильямса (Williams J. S., Prime graph components of finite groups, J. Algebra. 1981. Vol. 69, no. 2. P. 487–513) и Кондратьева (Кондратьев А. С., О компонентах графа простых чисел конечных простых групп, Мат. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797), следует, что этот вопрос решается отрицательно для коклики с числом вершин не менее 5.

Мною совместно с А.Л. Гаврилюком, А.С. Кондратьевым и И.В. Храмцовым поставленный вопрос был исследован для графов, имеющих не более 5 вершин. Доказана следующая

Теорема. *Пусть* Γ *— граф, имеющий не более 5 вершин и не являющийся* 5-*кокликой. Тогда вершины* Γ *можно пометить различными простыми числами так, что полученный помеченный граф будет графом Грюнберга-Кегеля некоторой конечной группы.*

Результаты работы опубликованы в [2].

3. *Получено полное описание неабелевых композиционных факторов конечной группы, каждая неразрешимая максимальная подгруппа которой имеет примарный индекс* (*совместно с Деминой Е.Н.*).

Хорошо известно, что в конечной разрешимой группе все максимальные подгруппы разрешимы и имеют примарные индексы. Однако обратное утверждение неверно: существуют конечные неразрешимые группы, в которых каждая максимальная подгруппа разрешима и имеет примарный индекс. Пример такой группы дает конечная простая группа $PSL_2(7)$.

Гуральником (Guralnick R. M., Subgroups of prime power index in a simple group, J. Algebra. 1983. Vol. 81, no. 2. P. 304–311) были описаны максимальные подгруппы примарных индексов в неабелевых простых группах и строение групп, в которых каждая максимальная подгруппа имеет примарный индекс. Неразрешимые группы, все локальные подгруппы которых разрешимы, были изучены в классической работе Томпсона (Thompson J.G., Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable, Bull. Amer. Math. Soc. 1968. Vol. 74, no. 3. P. 383–437).

Многими авторами изучались группы, в которых каждая подгруппа непримарного индекса (не обязательно максимальная) является группой, близкой к нильпотентной. Например, П.П. Барышовец (Baryshovets P.P., Finite nonsolvable groups in which subgroups of nonprimary index are nilpotent or are Shmidt groups, Ukrain. Math. J. 1981. Vol. 33, no. 1. P. 37–39) доказал, что группами $PSL_2(5)$, $PSL_2(7)$, $SL_2(5)$ и $SL_2(7)$ исчерпываются все группы, в которых каждая подгруппа непримарного индекса нильпотентна или является группой Шмидта (минимальной ненильпотентной группой). Ослабив условия и рассмотрев конечные группы, в которых неразрешимые максимальные подгруппы имеют примарные индексы, получаем более широкий класс групп. Возникают следующие вопросы: каково строение неразрешимой группы, все неразрешимые максимальные подгруппы которой имеют примарные индексы, и, в частности, каковы неабелевы композиционные факторы такой группы? На последний вопрос был получен исчерпывающий ответ. Доказана следующая

Теорема. *Пусть G — конечная неразрешимая группа, каждая неразрешимая максимальная подгруппа которой имеет примарный индекс. Тогда*

(i) *неабелевы композиционные факторы группы G попарно изоморфны и исчерпываются группами из следующего списка*:

(1) $PSL_2(2^p)$, *где p — простое число*;

(2) $PSL_2(3^p)$, *где p — простое число*;

(3) $PSL_2(p^{2^w})$, *где p — нечетное простое число и $w \geq 0$*;

(4) $Sz(2^p)$, *где p — нечетное простое число*;

(5) $PSL_3(3)$;

(ii) *для каждой простой группы S из списка пункта (i) найдется конечная группа G, каждая неразрешимая максимальная подгруппа которой имеет примарный индекс, такая, что $Soc(G) \cong S$, где через $Soc(G)$ обозначается цоколь группы G, т. е. подгруппа, порожденная всеми ее минимальными неединичными нормальными подгруппами.*

В качестве следствия этой теоремы получено полное описание конечных простых групп, все неразрешимые максимальные подгруппы которых имеют примарные индексы.

Следствие. *В конечной простой неабелевой группе G все неразрешимые максимальные подгруппы имеют примарные индексы тогда и только тогда, когда G изоморфна одной из следующих групп:*

(1) $PSL_2(2^p)$, *где p — простое число*;

(2) $PSL_2(3^p)$, *где p — нечетное простое число*;

(3) $PSL_2(p)$, *где p — простое число, $p > 3$ и $p^2 + 1 \equiv 0 \pmod 5$*;

(4) $Sz(2^p)$, *где p — нечетное простое число*;

(5) $PSL_3(3)$;

(6) $L_2(11)$.

Результаты работы опубликованы в [3].

Список основных опубликованных и представленных к печати работ:

1. Н. В. Маслова, О совпадении графов Грюнберга–Кегеля конечной простой группы и ее собственной подгруппы // Тр. ИММ УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 156–168.

2. A. L. Gavrilyuk, I. V. Khramtsov, A. S. Kondrat'ev, N. V. Maslova, On realizability of a graph as the prime graph of a finite group // Сиб. электрон. матем. изв. 2014. Т. 11. С. 246–257.

3. Е. Н. Демина, Н. В. Маслова, Неабелевы композиционные факторы конечной группы с арифметическими ограничениями на неразрешимые максимальные подгруппы // Тр. ИММ УрО РАН. 2014. Т. 20, № 2. С. 122–134.

4. Н. В. Маслова, Конечные группы с арифметическими ограничениями на максимальные подгруппы // Алгебра и логика, направлено в журнал.

5. N.V. Maslova, D.O. Revin, On the normal structure of a finite group with restrictions on the maximal subgroups // to appear in Proceedings of International conference "Groups St. Andrews – 2013" (St Andrews, Great Britain), принята к печати (получена положительная рецензия, выход сборника планируется в 2015 г.).

Участие в конференциях и школах:

1. "Современные проблемы математики и ее приложений": 45-я молодежная школа-конференция, посвященной 75-летию В.И. Бердышева. г. Екатеринбург, 2-8 февраля 2014 г. - 2 секционных доклада, 8-11 июня 2014 г. (летняя секция) - пленарный доклад (лекция).

2. Международная конференция "Алгебра и математическая логика: теория и приложения". г. Казань, 2-6 июня 2014 г. - секционный доклад.

3. Международная конференция "Квантовая и классическая топология трехмерных многообразий", санаторий "Юбилейный"(г. Магнитогорск), 5-18 июля 2014 г. - стендовый доклад.

4. Международная молодёжная школа-конференция "Алгоритмические вопросы теории групп и смежных областей". г. Новосибирск, 28 июля - 8 августа, 2014 г. - секционный доклад.

5. Summer School in Coherent Configurations, Permutation Groups and Applications in Algebraic Graph Theory 2014, August 31 - September 5, 2014, Atrium Hotel, Novy Smokovec, Slovakia. - секционный доклад.

6. Международная конференция по алгебре, посвященная 100-летию со дня рождения Л.А. Калужнина. Нальчик, 6-11 сентября 2014 г. - пленарный доклад.

7. Международная школа-конференция по теории групп, посвященная 70-летию В.В. Кабанова. Нальчик, 11-14 сентября 2014 г. - секционный доклад.

8. Российско-словенский семинар «Graphs and Groups, Cycles and Coverings» G2C2. Новосибирск, 23–26 сентября 2014 г. - секционный доклад.

9. VI Международный симпозиум «Абелевы группы», посвященный 100-летию со дня рождения Леонида Яковлевича Куликова. Москва, 2-6 ноября 2014 г. - секционный доклад.

Международная конференция «Мальцевские чтения» 2014. Новосибирск, 10-13 ноября 2014 г. - пленарный и секционный доклады.

Научно-организационная деятельность:

Участник оргкомитета и программного комитета 45-й молодежной школы-конференции "Современные проблемы математики и ее приложений", посвященной 75-летию В.И. Бердышева.

Преподавательская деятельность:

1. Лекционный курс "Дискретная математика" для студентов 2 курса Высшей школы экономики и менеджмента УрФУ.

2. Специализированный семинар "Теория групп" для студентов 3 курса Института математики и компьютерных наук УрФУ.

3. Руководство курсовой работой (совместно с И.В. Храмцовым) студентов 3 курса Института математики и компьютерных наук УрФУ Кирилла Якунина и Ксении Венско.

Работа со школьниками:

Председатель жюри Вузовско-академической олимпиады школьников по математике, проводимой ИММ УрО РАН и УрФУ в г. Екатеринбурге http://acm.urfu.ru/vuzakadem/matem/2014/