**ОТЧЕТ О НАУЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ**
**Масловой Натальи Владимировны**
**в 2015 г.**

*Основные полученные в 2015 г. результаты*:

Подгруппа $H$ группы $G$ называется *холловой*, если ее порядок $|H|$ и индекс $|G:H|$ взаимно просты.

*Спектром* конечной группы $G$ называется множество $\omega(G)$ порядков всех ее элементов. Множество всех простых чисел, входящих в спектр группы $G$, называется *простым спектром группы* $G$ и обозначается через $\pi(G)$. Спектр $\omega(G)$ определяет *граф простых чисел* (или *граф Грюнберга–Кегеля*) $\Gamma(G)$ группы $G$, вершинами которого являются простые числа из $\pi(G)$, и две различные вершины $r$ и $s$ смежны тогда и только тогда, когда число $rs$ принадлежит множеству $\omega(G)$.

Легко понять, что если $H$ — подгруппа конечной группы $G$, то $\omega(H)$ является подмножеством $\omega(G)$ и $\pi(H)$ является подмножеством $\pi(G)$. Группа $G$ называется минимальной относительно простого спектра, если $\pi(G) \neq \pi(H)$ для любой собственной (эквивалентно, для любой максимальной) подгруппы $H$ из $G$. Группа $G$ называется *критической по спектру* (соответственно *критической по простому спектру*), если для любых подгрупп $K$ и $L$ группы $G$ таких, что $K$ — нормальная подгруппа в $L$, из равенства $\omega(L/K) = \omega(G)$ (соответственно $\pi(L/K) = \pi(G)$) следует, что $L = G$ и $K = 1$.

Понятие критической по спектру (или $\omega$-критической) группы было введено в работе В.Д. Мазурова и В. Ши (Алгебра и логика, 2012, т. 51, № 2, с. 239–243), в этой же работе был поставлен вопрос: *Верно ли, что конечная простая группа, не изоморфная* $P\Omega_8^+(2)$ *и* $P\Omega_8^+(3)$*, является критической по спектру*?

Группа $G$ называется *распознаваемой по спектру*, если из равенства $\omega(G) = \omega(H)$ следует изоморфизм групп $G$ и $H$. Легко понять, что если группа $G$ распознаваема по спектру, то она является критической по спектру. Несмотря на то, что многие конечные простые группы распознаваемы по спектру, на последний вопрос был дан отрицательный ответ, более того, были определены все конечные простые группы, не являющиеся критическими по спектру. Доказана следующая

**Теорема 1.** Пусть $G$ — конечная простая группа, $K$ и $L$ — подгруппы в $G$ такие, что $K$ — нормальная подгруппа в $L$. Тогда $\omega(L/K) = \omega(G)$, если, и только если $K = 1$ и выполняется одно из следующих утверждений:

(1) $G = PSp_4(q)$ и $L \cong PSL_2(q^2)\langle t\rangle$, где $q$ четно и $t$ — автоморфизм порядка 2 группы $PSL_2(q^2)$;

(2) $G = PSp_8(q)$ и $L \cong SO_8^-(q)$, где $q$ четно;

(3) $G \cong P\Omega_8^+(2)$ и $L \cong P\Omega_7(2)$;

(4) $G \cong P\Omega_8^+(3)$ и $L \cong P\Omega_7(3)$.

В доказательстве теоремы 1 использовался полученный ранее автором (Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, 2014, т. 20, № 1, с. 156–168) и независимо Т. Бёрнсом и Э. Ковато (arXiv:1407.8128) критерий совпадения графов Грюнберга–Кегеля конечной простой группы и ее собственной подгруппы. Для знакопеременной группы и ее собственной подгруппы критерий получен по модулю расширенной бинарной гипотезы Гольдбаха, для остальных конечных простых групп критерий от нее не зависит. Однако доказательство теоремы 1 не зависит от бинарной гипотезы Гольдбаха, т.к. знакопеременные $A_n$ группы при $n \notin \{6, 10\}$ распознаваемы по спектру.

Легко видеть, что любая группа, являющаяся критической по простому спектру, будет также критической по спектру и минимальной относительно простого спектра. С другой стороны, исследование групп, критических по простому спектру, можно свести к исследованию групп, минимальных относительно простого спектра, ввиду следующей доказанной теоремы.

**Теорема 2.** Пусть $G$ — группа, минимальная относительно простого спектра. Тогда $G$ является группой, критической по простому спектру, если, и только если ее подгруппа Фиттинга $F(G)$ является холловой подгруппой в $G$.

Легко понять, что группа с холловыми максимальными подгруппами будет минимальной относительно простого спектра. Ранее автором совместно с Д.О. Ревиным в связи с исследованием гипотезы П. Шумяцкого (см. проблему 17.125 из "Коуровской тетради") было показано, что каждая конечная группа с холловыми максимальными подгруппами порождается парой сопряженных элементов (Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, 2013, т. 19, № 3, с. 199–206). Это удалось сделать благодаря тому, что автором (Сиб. мат. журн., 2012, т. 53, № 5, с. 1065–1076) было показано, что неабелевы композиционные факторы таких групп изоморфны группам из множества $\{PSL_2(7),\ PSL_2(11),\ PSL_5(2)\}$, а затем в совместной работе с Д.О. Ревиным (Мат. тр., 2012, т. 15, № 2, с. 105–126) получено полное описание нормального строения таких групп. Отметим, что существуют группы, минимальные относительно простого спектра, неабелевы композиционные факторы которых изоморфны группам из множества $\{PSL_2(7),\ PSL_2(11),\ PSL_5(2)\}$, не являющиеся, однако, группами с холловыми максимальными подгруппами. Доказана следующая теорема.

**Теорема 3.** Пусть $G$ — конечная группа, минимальная относительно простого спектра, неабелевы композиционные факторы которой изоморфны группам из множества $\{PSL_2(7),\ PSL_2(11),\ PSL_5(2)\}$. Тогда группа $G$ порождается двумя сопряженными элементами.

Отметим, что и этот результат получен снова благодаря использованию информации о нормальном строении групп, минимальных относительно простого спектра, неабелевы композиционные факторы которых изоморфны группам из множества $\{PSL_2(7), PSL_2(11), PSL_5(2)\}$. Поэтому проблема исследования нормального строения групп, минимальных относительно простого спектра, представляется естественной и интересной. Доказана следующая

**Теорема 4.** Пусть $G$ — конечная группа, имеющая в качестве неабелева композиционного фактора конечную простую группу $S$ такую, что $|\pi(S)| = 3$. Тогда верно одно из утверждений:

$(i)$ $S \in \{A_6, PSU_3(3), PSU_4(2)\}$ и группа $G$ не минимальна относительно простого спектра.

$(ii)$ $S \in \{A_5, PSL_2(7), PSL_3(3)\}$ и группа $G$ минимальна относительно простого спектра тогда и только тогда, когда $G$ обладает нормальным рядом

$$G = G_0 \geq G_1 \geq \ldots \geq G_n = \{1\}$$

таким, что

(1) при $i \geq 1$ группа $G_i/G_{i+1}$ является элементарной абелевой, изоморфной некоторой силовской подгруппе $G$, и $G/G_i$ действует неприводимо на $G_i/G_{i+1}$;

(2) $G_1$ — холлова подгруппа в $G_0$, и либо факторгруппа $\bar{G} = G_0/G_1$ изоморфна одной из простых групп $A_5$ или $PSL_3(3)$, либо $O_3(\bar{G}) = \Phi(\bar{G})$ и $\bar{G}/\Phi(\bar{G}) \cong PSL_2(7)$.

В частности, если $S \cong PSL_2(7)$, то группа $G$ минимальна относительно простого спектра тогда и только тогда, когда $G$ является группой с холловыми максимальными подгруппами.

$(iii)$ $S \cong PSL_2(8)$ и если группа $G$ минимальна относительно простого спектра, то ее неабелевы композиционные факторы изоморфны группам из множества $\{S\} \cup \{Sz(2^w) \mid w \equiv \pm 1 \pmod 3\}$.

$(iv)$ $S \cong PSL_2(17)$ и если группа $G$ минимальна относительно простого спектра, то ее неабелевы композиционные факторы изоморфны группам из множества $\{S\} \cup \{Sz(2^w)\}$.

Кроме того, в случаях $(iii)$ и $(iv)$ выполняются следующие утверждения:

$(a)$ для любой простой группы $R$ из множества $\{Sz(2^w) \mid w \equiv \pm 1 \pmod 3\}$ и $\{Sz(2^w)\}$ соответственно найдется минимальная относительно простого спектра группа $G$, имеющая неабелевы композиционные факторы, изоморфные $S$ и $R$;

$(b)$ для любого натурального числа $m$ найдутся группы $R_1, \ldots, R_m$ из множества $\{Sz(2^w) \mid w \equiv \pm 1 \pmod 3\}$ и $\{Sz(2^w)\}$ соответственно и минимальная относительно простого спектра группа $G$, имеющая неабелевы композиционные факторы, изоморфные $S, R_1, \ldots, R_m$.

В соответствии с определением Ф. Холла, подгруппа $H$ группы $G$ называется *пронормальной*, если для любого элемента $g \in G$ подгруппы $H$ и $H^g$ сопряжены в подгруппе $\langle H, H^g \rangle$.

Понятие пронормальной подгруппы обобщает понятие нормальной подгруппы, поэтому особый интерес представляет исследование пронормальных подгрупп в простых группах. Хорошо известно, что в любой группе пронормальными являются максимальные подгруппы (в частности, имеющие нечетный индекс), силовские подгруппы (в частности, силовские 2-подгруппы) и подгруппы, содержащие нормализатор силовской подгруппы (в частности, надгруппы нормализатора силовской 2-подгруппы). В работе Е.П. Вдовина и Д.О. Ревина (Сиб. матем. журн. 2012. Т 53, № 3. С. 527–542) была высказана гипотеза о том, что в конечной простой группе подгруппы нечетного индекса пронормальны. Совместно с А. С. Кондратьевым и Д. О. Ревиным доказана следующая

**Теорема 5.** *Подгруппы нечетного индекса пронормальны в любой конечной простой группе, изоморфной одной из следующих групп*:

(1) $A_n$, $n \geq 5$;
(2) *одной из* 26 *спорадических групп*;
(3) *группе лиева типа на полем характеристики* 2;
(4) $L_{2^n}(q)$;
(5) $U_{2^n}(q)$;
(6) $S_{2n}(q)$, *где* $q \not\equiv \pm 3 \pmod 8$;
(7) $O_n(q)$;
(8) *исключительной группе лиева типа, отличной от* $E_6(q)$ *и* ${}^2E_6(q)$.

*Список основных опубликованных в 2015 г. работ*:

1. Н. В. Маслова, Конечные простые группы, не являющиеся критическими по спектру // Тр. ИММ УрО РАН. 2015. Т. 21, № 1. С. 172–176.

2. Н. В. Маслова, О конечных группах, минимальных относительно простого спектра // Тр. ИММ УрО РАН. 2015. Т. 21, № 3. С. 222–232.

3. Н. В. Маслова, Конечные группы с арифметическими ограничениями на максимальные подгруппы // Алгебра и логика. 2015. Т. 54, № 1. С. 95-102.

4. N.V. Maslova, D.O. Revin, On the normal structure of a finite group with restrictions on the maximal subgroups // Groups St Andrews 2013. London Mathematical Society Lecture Note Series, 422, eds. C. M. Campbell, M. R. Quick, E. F. Robertson, C. M. Roney-Dougal. Cambridge: Cambridge University Press, 2015. P. 428–435.

5. А. С. Кондратьев, Н. В. Маслова, Д. О. Ревин, О пронормальности подгрупп нечетного индекса в конечных простых группах // Сибирский математический журнал. 2015. Т. 56, № 6. С. 1375–1383.

*Участие в 2015 г. в конференциях и школах*:

1. "Современные проблемы математики и ее приложений": 46-я Международная молодежная школа-конференция, г. Екатеринбург, 25-31 января 2015 г. - пленарный доклад (лекция).

2. Международная конференция ”Мальцевские чтения 2015”, посвященная 75-летию академика РАН Ю. Л. Ершова. Новосибирск, 3-7 мая 2015 г. - два секционных доклада.

3. Конференция математиков ”Встреча поколений” Фонда ”Династия”. Москва, 9–11 июня 2015 г. - доклад.

4. Международная конференция ”Discrete Mathematics, Algebra and Their Applications”. Минск, 14-18 сентября 2015 г. - секционный доклад

5. Международная конференция ”Groups and Graphs, Algorithms and Automata”. Екатеринбург, 9-15 августа 2015 г. - пленарный доклад

6. ”Theoretical and computational methods in dynamical systems and fractal geometry”. Марибор, Словения, 7-11 апреля 2015 г. - доклад

*Работа в научных центрах и международных группах 2015 г.*:

Визит в Словению, г. Марибор, Университет г. Марибора (Univerza v Mariboru) и г. Копер, Университет Приморска (University of Primorska).

Выступление на семинаре: ”Seminar Oddelka za matematiko in racunalnistvo FNM UM”, Марибор, Словения, 8 апреля 2015 г.
Тема доклада: ”On spectrum non-critical finite simple group”.

Выступление на семинаре ”Raziskovalni matematicni seminar FAMNIT UP”, Копер, Словения, 16 апреля 2015 г.
Тема доклада: ”On the finite groups which are spectrum minimal, prime spectrum minimal or prime graph minimal”.

Совместная научная работа с проф. Д. Пагоном (Марибор, Словения).

*Научно-организационная деятельность в 2015 г.*:

Участник оргкомитета и программного комитета 46-й Международной молодежной школы-конференции "Современные проблемы математики и ее приложений".
http://conf.uran.ru/default.aspx?con=99

Участник оргкомитета и программного комитета The International Conference and PhD Summer School "Groups and Graphs, Algorithms and Automata".
http://g2a2.imm.uran.ru

*Преподавательская деятельность в 2015 г.*:

1. Лекционный курс "Теория информации" для студентов 4 курса Института математики и компьютерных наук УрФУ.

2. Специализированный семинар "Теория групп" для студентов 3-4 курса и магистратуры Института математики и компьютерных наук УрФУ.

*Работа со школьниками в 2015 г.*:

Председатель жюри Вузовско-академической олимпиады школьников по математике, проводимой ИММ УрО РАН и УрФУ в г. Екатеринбурге
http://acm.urfu.ru/vuzakadem/matem/2015/