

Отчет о научной и педагогической деятельности по гранту фонда  
«Династия» (конкурс 2013 года) за 2013–2016 годы

НЕТАЙ ИГОРЬ ВИТАЛЬЕВИЧ

1. РЕЗУЛЬТАТЫ, ПОЛУЧЕННЫЕ В 2013–2016 ГОДАХ

**1.1. Сизигии однородных пространств и минимальные резольвенты однородных расслоений.** Пусть  $G$  — редуктивная алгебраическая группа, определённая над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  (можно считать,  $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ ),  $P \subset G$  — параболическая подгруппа. Проективные вложения однородного пространства  $G/P \subset \mathbb{P}(V)$  описаны и хорошо известны (мы изучаем вложения, образы которых не лежат в гиперплоскостях). Образ любого такого вложения задаётся пересечением квадрик в проективном пространстве. Пусть  $A$  — проективная координатная алгебра образа вложения,  $S = \mathbb{k}[V^*]$ . Тогда  $A$  задаётся как фактор  $S$  по идеалу  $I = (Q)$ , порождённому некоторым пространством квадрик  $Q$ . Нас в общем случае интересует построение минимальной резольвенты  $A$  как  $S$ -модуля.

Есть разные подходы к вычислению этой резольвенты. Например, её можно получить, используя квадратично двойственную алгебру  $S^*/(Q^\perp)$ . Мы для вычисления используем комплекс Кошуля  $A \otimes \Lambda^\bullet V^*$ . Поскольку на нём также действует эквивариантно группа  $G$ , это даёт мощное средство вычисления.

Исследование комбинаторики, возникающей из эквивариантного действия группы  $G$ , привело к некоторым задачам классификации представлений редуктивных алгебраических групп. Доказаны некоторые утверждения «монотонности» кратностей подпредставлений в тензорных произведениях и внешних степенях представлений. В частности, изучалось, в каких случаях тензорные произведения неприводимых представлений с данным неприводимым представлением, а также каждая внешняя степень данного неприводимого представления имеют простой спектр (то есть не имеют кратных подпредставлений). Данная классификация опирается на наличие функториальных вложений вида

$$V_\lambda \otimes V_\mu^* \subseteq V_{\lambda+\mu} \otimes V_{\mu+\nu}^*$$

и

$$\text{Hom}_G(V_\theta, \Lambda^k V_\lambda) \subseteq \text{Hom}_G(V_{\theta+k\nu}, \Lambda^k V_{\lambda+\nu}),$$

которые доказываются рассмотрением однородных расслоений на многообразиях флагов. Здесь переменные  $\lambda, \mu, \nu$  обозначают доминантные веса редуктивной группы  $G$ ,  $k \geq 1$  целое, через  $V_\lambda$  обозначается неприводимое представление группы  $G$  со старшим весом  $\lambda$ .

Рассмотрение аналогичных вложений такого вида может помочь развить в дальнейшем комбинаторику на комплексе Кошуля, рассматривая не только отдельные изотипические компоненты относительно действия группы, но и

связать различные компоненты, используя структуру алгебры на сумме пространств сизигий, однако пока что это не реализовано и является планом на будущее.

По данной теме одна статья опубликована и ещё одна выйдет в начале 2017 г.

**1.2. Конфигурации точек в евклидовых пространствах.** Рассмотрим конфигурацию, состоящую из нескольких точек, лежащих в евклидовом пространстве. На расстояния между точками существуют соотношения. Например, если взять 3 точки на плоскости, то квадрат площади треугольника является многочленом от квадратов длин сторон. Если точки лежат на одной прямой, то площадь равна нулю, и соответствующий многочлен задаёт соотношение на расстояния. Аналогичным образом, если рассмотреть  $n$  точек в  $d$ -мерном пространстве, то возникают соотношения Кэли–Менгера, выражающие объёмы  $(d + 1)$ -мерных симплесов через квадраты расстояний между точками, соответствующими вершинам. В известной работе Менгера 1931 г. изучалась задача евклидовости конечных метрических пространств. А именно, изучались соотношения на расстояния между наборами точек в евклидовом пространстве. В этой работе были сформулированы необходимые и достаточные условия евклидовости конечных метрических пространств в терминах соотношений на расстояния.

Совместно с А. А. Гайфуллиным изучалась алгебраическая задача описания идеала всех соотношений на квадраты расстояний между точками. Оказалось, что набор соотношений Кэли–Менгера не является полным. Были найдены новые соотношения и сформулирована гипотеза о полноте найденного набора. Кроме того, были получены соотношения, обобщающие планиметрическую теорему Птолемея, также не следующие из соотношений Кэли–Менгера, но следующие из найденных нами соотношений. Идеал соотношений является однородным идеалом в алгебре многочленов от квадратов расстояний между точками. Этот идеал задаёт многообразие, вложенное в проективное пространство. В случае конфигураций точек на прямой это вложение является квадратичным вложением Веронезе, что даёт ответ в задаче описания идеала соотношений и сизигиями данного идеала.

Также было бы интересно следом за описанием соотношений описать пространства сизигий, однако эта задача при  $d \geq 2$  выглядит на данный момент очень сложной.

Предложенные в заявке темы исследованы, получены новые результаты, результатом работы являются статьи.

## 2. ОПУБЛИКОВАННЫЕ И ПОДАННЫЕ В ПЕЧАТЬ РАБОТЫ

### ПУБЛИКАЦИИ И ПРЕПРИНТЫ

- [1] И. В. Нетай, “Алгебры сизигий вложений Сегре”, *Функц. анализ и его прил.*, **47:3** (2013), 54–74 ; *Funct. Anal. Appl.*, **47:3** (2013), 210–226 .
- [2\*] I. V. Netay, “Syzygy algebras for the Segre embedding”, arXiv: <http://arxiv.org/abs/1108.3733>.
- [2] И. В. Нетай, “Сизигии квадратичного вложения Веронезе”, *Матем. сб.*, **???:1** (2017).
- [4\*] I. V. Netay, “Syzygies of Quadratic Veronese Embedding”, arXiv: <https://arxiv.org/abs/1610.04558>.

## 3. УЧАСТИЕ В ШКОЛАХ И КОНФЕРЕНЦИЯХ

- Доклад «Сизигии вложения Серге» на летней школе-конференции по проблемам алгебраической геометрии и комплексного анализа, Лютово, 20–25 мая 2013 г.
- Международная конференция «Алгебраическая геометрия, алгебра и теория чисел», посвящённая 90-летию академика Игоря Ростиславовича Шафаревича, МИАН, Москва, 3–5 июня 2013 г.
- Девятый традиционный летний семинар на даче у Валеры Лунца с 7 по 14 июля 2013 г.
- Talk «Syzygy algebras for the quadratic Veronese embeddings» on the algebraic geometry and complex analysis, Lutovo, May 23–28, 2013 г.
- Workshop and conference «GEOQUANT 2013», Vienna, August 19–30, 2013 г.
- Talk «Syzygies of quadratic Veronese embeddings» on the international open Chinese–Russian conference «Torus actions: topology, geometry and number theory», Khabarovsk, September 2–7, 2013 г.
- Доклад «Сизигии квадратичного вложения Веронезе» на семинаре «Алгебраическая топология и её приложения» им. М. М. Постникова в МГУ 17 сентября 2013 г.
- Доклад «Сизигии некоторых вложений Серге и Веронезе» на семинаре «Группы Ли и теория инвариантов» в МГУ 27 ноября 2013 г.
- Четвёртая ежегодная самарская летняя школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов» в Москве с 27 января по 1 февраля 2014 г.
- Доклад «Теорема Понселе» в рамках программы повышения квалификации профессорско-преподавательского состава Сибири и Дальнего Востока в Иркутске с 3 по 7 марта 2014 г.
- Однодневная конференция, посвящённая 50-летию Ю.Г. Прохорова г. Москва, Россия, 4 апреля 2014 г.
- Доклад «Сизигии проективных вложений некоторых однородных пространств» на международной конференции «Современные проблемы математики, информатики и естественнонаучного знания» посвящённой 155-летию И. В. Мещерского, в г. Коряжме Архангельской обл. 15–18 сентября.
- Доклад «Syzygies of Projective Embeddings of some Homogeneous Spaces» на международной конференции Geometry, Topology and Integrability в Сколково, 20–24 октября 2014 г.
- Миникурс «27 прямых на кубической поверхности» на школе по алгебраической геометрии «III Московский десант», Иркутск, 13–17 апреля 2015 г.
- Конференция «Algebraic Geometry and Applications to Physics and Dynamics», May 25–29, 2015, Euler International Mathematical Institute, St. Petersburg, Russia.
- Доклад «Функциональные уравнения Хирцебруха» на пятой ежегодной самарской летней школе-конференции «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов» в Самаре 21–27 июня 2015 г.

- V школа-конференция по алгебраической геометрии и комплексному анализу для молодых математиков России, доклад «Функциональные уравнения Хирцебруха», Коряжма, 17–22 августа 2015 г. Организатор.
- Школа и конференция «GeoQuant» по геометрии и квантованию, Мадрид, 6–19 сентября 2015 г.
- Доклад «Эллиптические кривые и теория групп» на международной конференции «Magadan Algebraic Geometry», Магадан, 7–12 декабря 2015 г.
- Доклад «Треугольники Шарыгина» на IX Байкальских Чтениях, 9–18 марта 2016 г., ИМЭИ ИГУ, Иркутск.
- Доклад «Sharugin triangles» на международной конференции по алгебраической геометрии, комплексному анализу и компьютерной алгебре в филиале САФУ им. М. В. Ломоносова в г. Коряжма 3–9 августа 2016 г.

#### 4. РАБОТА В НАУЧНЫХ ЦЕНТРАХ И МЕЖДУНАРОДНЫХ ГРУППАХ

- научный сотрудник Института Проблем Передачи Информации РАН имени А. А. Харкевича.
- научный сотрудник Лаборатории Алгебраической Геометрии НИУ ВШЭ.