Отчет о научной и педагогической деятельности по гранту фонда «Династия» (конкурс 2013 года) за 2015 год

НЕТАЙ ИГОРЬ ВИТАЛЬЕВИЧ

1. Результаты, полученные в 2015 году

1.1. **Сизигии однородных пространств и минимальные резольвенты однородных расслоений.** Рассмотрим редуктивную группу G и её параболическую подгруппу P. Вложения многообразия G/P в проективное пространство хорошо изучены. Тогда возникает естественная задача описания минимальных резольвент однородных на расслоений многообразия G/P пространстве вложения. В таком случае на резольвентах возникает естественное действие группы G, позволяющее вычислять резольвенты в терминах представлений группы G. Для случае квадратичного вложения Веронезе построены резольвенты обратимых пучков на образе вложения. В дальнейшем планируется изучение резольвент однородных расслоений в новых случаях однородных пространств и расслоений. В частности, для этого планируется использовать естественно возникающую структуру алгебры на сумме пространств сизигий. Также полезным инструментом, не использованным ранее, является наличие естественной двойственности на алгебре сизигий для некоторых проективных вложений однородных пространств.

1.2. **Послойно мультипликативные роды Хирцебруха.** По каждому формальному ряду $f(x) = x + \dots$ над коммутативным ассоциативным кольцом R можно построить род Хирцебруха L_f, сопоставляющий стабильно комплексному многообразию M элемент кольца R. Род L_f называется *послойно мультипликативным* относительно стабильно комплексного многообразия F, если для любого расслоения $E \to B$ со слоем F выполнено равенство $L_f(E) = L_f(B)L_f(B)$.

Функция $f(z)$ комплексного переменного, для которой $f(z) = z + O(z^2)$, называется *n-жёсткой*, если сумма вычетов функции $F(z) = \prod_{i=0}^{n} f(z - z_i)$ в малой окрестности U точки $z = 0$, не содержащей других нулей функции $f(z)$, не зависит от выбора не совпадающих точек $z_0, \dots, z_n \in U$. Легко проверить, что n-жёсткость функции $f(z)$ равносильна функциональному уравнению

$$\sum_{k=0}^{n} \prod_{i \neq k} \frac{1}{f(z_i - z_k)} = C,$$

где C — константа.

Оказывается, что n-жёсткость функции $f(z)$ равносильна послойной мультипликативности рода Хирцебруха L_f, построенного по разложению в степенной ряд функции $f(z)$, относительно $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$.

Было доказано, что для $n > 1$ семейство всех n-жёстких функций параметризуется алгебраическим многообразием, если кольцо коэффициентов R

является полем нулевой характеристики (в случае $n = 1$ оно является бесконечномерным аффинным пространством). Доказательство использует технику симметрических многочленов и многочленов Шура. Для $n = 3$ это многообразие было описано, а также были описаны функции, задаваемые данными рядами. Оказывается, что для $C \neq 0$ такие функции задают известный двупараметрический род Тодда, а для $C = 0$ такие функции являются эллиптическими функциями уровня 2 или 4. Между семействами эллиптических функций уровня 2 и 4 построено взаимно однозначное соответствие при помощи преобразования Ландена. Опубликована статья совместно с В. М. Бухштабером.

1.3. **Минимальные поверхности дель Пеццо в положительной характеристике.** Хорошо известна и активно изучается в том числе в последнее время задача описания минимальных алгебраических поверхностей с действием группы Галуа и геометрической группы автоморфизмов. Эта задача приводит к классификации классов сопряжённости конечных подгрупп в двумерной группе Кремоны. Она хорошо изучена в нулевой характеристике в случае алгебраически замкнутого поля. Совсем недавно новые интересные результаты о классах сопряжённости групп нечётного порядка в двумерной вещественной группе Кремоны получены Е. Ясинским. В случае конечных полей также недавно получены новые результаты А. С. Трепалиным. Последние ограничиваются случаем характеристики, не равной двум. Именно в этом случае планируется исследование и построение минимальных поверхностей дель Пеццо.

1.4. **Равнобедренные биссектральные треугольники.** Хорошо известна следующая задача из задачника Шарыгина по планиметрии. Назовём *биссектральным треугольником* для заданного треугольника треугольник с вершинами в основаниях биссектрис данного. Ясно, что если исходный является равнобедренным, то и биссектральный также является равнобедренным. Задача состоит в построении неравнобедренного треугольника с равнобедренным биссектральным.

Хорошо известны примеры таких треугольников. Например, таким является (единственный с точностью до подобия) неравнобедренный треугольник с вершинами в вершинах правильного семиугольника. Также известно, что такие треугольники параметризуются непустым открытым в евклидовой топологии подмножеством некоторой эллиптической кривой (открытое подмножество задаётся неравенством треугольника и положительностью сторон). Известно, что на этой кривой плотны рациональные точки. Однако задача описания таких треугольников с целыми длинами сторон оказывается более трудной. В частности, треугольник с целыми сторонами и (судя по всему) минимальным периметром имеет длины сторон $(19214131, 18800081, 1481089)$. Длины сторон следующих по минимальному значению периметра записываются уже не настолько коротко.

Данная задача является хорошей мотивировкой к изучению эллиптических кривых и демонстрирует многие базовые идеи и приёмы алгебраической геометрии, начиная с «простой» планиметрической задачи. Совместно с А. В. Савватеевым планируется публикация на данную тему. Данный сюжет имеет педагогическую ценность, так как демонстрирует применение в планиметрической задаче с формулировкой, доступной любому школьнику, теории эллиптических кривых и теории Галуа. В то же время, по красоте сюжет я бы сравнил с теоремой Понселе, также приводящей от элементарной планиметрической задачи к алгебраической геометрии и, в частности, эллиптическим кривым.

2. Опубликованные и поданные в печать работы

- Статья «Сизигии квадратичного вложения Веронезе», представленная в печать в Математический сборник, принята по модулю правок.
- В. М. Бухштабер, И. В. Нетай, “Функциональное уравнение Хирцебруха и эллиптические функции уровня d”, Функц. анализ и его прил., 49:4 (2015), 1–17.

3. Участие в школах и конференции

- Миникурс «27 прямых на кубической поверхности» на школе по алгебраической геометрии «III Московский десант», Иркутск, 13–17 апреля 2015 г.
- Конференция «Algebraic Geometry and Applications to Physics and Dynamics», May 25–29, 2015, Euler International Mathematical Institute, St. Petersburg, Russia.
- Доклад «Функциональные уравнения Хирцебруха» на пятой ежегодной самарской летней школе-конференции «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов» в Самаре 21–27 июня 2015 г.
- V школа-конференция по алгебраической геометрии и комплексному анализу для молодых математиков России, доклад «Функциональные уравнения Хирцебруха», Коряжма, 17–22 августа 2015 г. Организатор.
- Школа и конференция «GeoQuant» по геометрии и квантованию, Мадрид, 6–19 сентября 2015 г.
- Доклад «Эллиптические кривые и теория групп» на международной конференции «Magadan Algebraic Geometry», Магадан, 7–12 декабря 2015 г.

4. Работа в научных центрах и международных группах

- научный сотрудник Института Проблем Передачи Информации РАН имени А. А. Харкевича.
- научный сотрудник Лаборатории Алгебраической Геометрии НИУ ВШЭ.