Протасов Владимир Юрьевич

Отчет по гранту фонда Династия за 2014 год

Результаты, полученные в этом году

Я занимался задачами устойчивости линейных динамических систем с переключениями, методами максимизации/минимизации спектрального радиуса неотрицательных матриц и исследованиями нестационарных уточняющих алгоритмов. Из полученных результатов выделим следующие:

1. Устойчивость линейных систем с переключениями. Мы исследуем динамическую систему вида

$$\dot{x}(t) \;=\; A(t)x(t)\,, \qquad t \in [0, +\infty), \tag{1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^d$, и матрица $A(t)$ может принимать значения на заданном компактном множестве $d \times d$-матриц $\mathcal{U}$. Система называется *устойчивой*, если для любой измеримой функции $A(\cdot) : [0, +\infty) \;\to\; \mathcal{U}$, имеем $x(t) \to 0$, $t \to \infty$, т.е., все траектории системы стремятся к нулю. Устойчивость линейных систем с переключениями играет ключевую роль во многих прикладных задачах, этой проблеме посвящена обширная литература (монография Д.Либерзона, работы Молчанова, Пятницкого, Рапоппорта, Барабанова, Гурвица, Бланкини, Миани, и др.) Обычно устойчивость доказывается с помощью построения функции Ляпунова (положительно-однородного функционала в $\mathbb{R}^d$, убывающего вдоль любой траектории системы). В работе [5] мы разрабатываем итерационный метод построения кусочно-линейной функции Ляпунова, оцениваем его погрешность и скорость его сходимости. Метод применим в достаточно высоких размерностях (до 10, для положительных систем – до 100).

В работе [7] мы оцениваем длину шага дискретизации системы. Дискретизация, т.е., приближение линейной системы (1) дискретной системой (производная $\dot{x}(t)$ заменяется на разделенную разность с шагом $\tau > 0$) является еще одним распространенным методом доказательства устойчивости. Известно, что если дискретная система устойчива при некотором τ, то и исходная непрерывная система устойчива (Гурвиц, 2002). Недостатком этого метода являлось отсутствие приемлемой оценки снизу на длину шага τ. В [7] мы доказываем, что $\tau \geq C_0 d^{-2}$, где C_0 – абсолютная константа. Метод доказательства основан на применении неравенства типа Маркова-Бернштейна для квазиполиномов (полиномов по системам экспонент) и недавнего результата П.Склярова (2010) о неравенстве Маркова-Бернштейна для алгебраических полиномов с весом Лагерра.

В работе [8] мы исследуем *маргинальную неустойчивость* системы – феномен, при котором неустойчивая система не имеет экспоненциально растущих траекторий. Для обыкновенного дифференциального уравнения (случай $\mathcal{U} = \{A\}$) маргинальная неустойчивость возникает в случае резонанса, когда наибольшее по модулю собственное значение матрицы A образует жорданову клетку. В этом случае максимальный рост траекторий – полиномиальный, степени на единицу меньшей размерности клетки (степень резонанса). В недавней работе И.Читур, П.Масон и М.Сигалотти ("On the marginal instability of linear switched systems", Syst. Cont. Letters, 61 (2012), 747-757) выдвинули две гипотезы, утверждающие, что похожая ситуация имеет место для произвольных систем общего положения. В работе [8] мы опровергаем обе гипотезы, а также доказываем необходимые и достаточные условия маргинальной неустойчивости. В той же работе приведен пример неустойчивой системы, в которой наибольший рост траекторий не является полиномиальным.

В работе [9] изучаются системы, у которых все траектории имеют одинаковый асимптотический рост при $t \to \infty$. Это равносильно следующему свойству: все матрицы мультипликативной полугруппы, порожденной семейством $\left\{e^{tA} \mid A \in \mathcal{U}, t \in \mathbb{R}\right\}$, имеют спектральный радиус 1. Такие полугруппы изучались в работах Раджави, Омладича и Попова, а также неоднократно возникали в задачах комбинаторики, линейной алгебры, теории всплесков, функциональных уравнений и т.д. Мы показываем, что все невырожденные элементы полугруппы являются ортогональными матрицами в некотором (общем!) базисе, а также изучаем структуру вырожденных элементов. В частности, доказано, что задача распознавания полугрупп с постоянным спектральным радиусом решается за полиномиальное время.

2. Спектральный симплекс-метод. Проблема минимизации/максимизации спектрального радиуса на заданном компактном множестве матриц $\mathcal{M}$ широко изучалась в литературе в связи с приложениями к теории графов, дифференциальным уравнениям, математической экономике, и т.д. Напомним, что спектральный радиус $\rho(A)$ – это наибольший из модулей собственных значений матрицы A. Сложность задачи объясняется тем, что функция $\rho(\cdot)$ не является, вообще говоря, ни выпуклой ни вогнутой. В статье [4] разработан спектральный симплекс-метод дня специальных множеств $\mathcal{M}$. Это множества неотрицательных матриц, в которых i-тая строка выбирается независимо от остальных из заданного компактного множества $X_i \subset \mathbb{R}^d$, $i = 1, \ldots, d$. Доказано, что алгоритм не зацикливается и находит наименьший и наибольший спектральный радиус за конечное время. Эффективность метода продемонстрирована на численных примерах. Так, для матриц размерности 500 алгоритм решает задачу на несколько минут на стандартном компьютере.

3. Нестационарные уточняющие алгоритмы. Уточняющие алгоритмы (subdivision algorithms) были изобретены в конце 80-х гг. прошлого века для интерполяции и приближения непрерывных функций по их значениям на равномерной сетке. Идея алгоритма состоит в том, что, имея значения функции на некоторой сетке, по ним строятся значения на более плотной сетке, и т.д., а в пределе получается приближающая непрерывная функция. Формулы перехода – линейные и одинаковые на всех итерациях. Идея подобных алгоритмов восходит к работам де Рама начала 50-х гг. (алгоритм срезания углов, кривые де Рама). Сейчас, благодаря простоте компьютерной реализации и быстрой сходимости, уточняющие алгоритмы активно применяются для приближения и восстановления функций, а также для дизайна фрактальных кривых и поверхностей. Проблемами сходимости уточняющих алгоритмов и оценке гладкости предельной функции занимались многие известные математики: Добеши, Коэн, Дамен, Миччелли, Дин, Левин, Освальд, Рон, и т.д. В работе [6] мы представляем метод вычисления гладкости предельной функции для нестационарных уточняющих схем (когда формулы перехода – разные на разных уровнях). В качестве приложения этого метода удалось найти показатели гладкости обобщенных всплесков Добеши и доказать гипотезу, сформулированную Дин, Левиным, Рендером и Коучевым в 2013.

Работы, опубликованные и поданные в печать в 2014 г.

1. V.Yu.Protasov and D.O.Logofet, *Rank-one corrections of nonnegative matrices with an application to matrix population models*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 35 (2014), no 2, 749–764.

2. А.С.Войнов, В.Ю.Протасов, *Компактные несжимающие полугруппы аффинных операторов*, Матем. Сб., принята к печати (2014).

3. В.Ю.Протасов, *Два века теоремы Понселе*, Квант, No 5-6 (2014), 2-12.

4. V.Yu.Protasov, *Spectral simplex method*, submitted to Mathematical Programming (2014).

5. N.Guglielmi, L.Laglia, and V.Yu.Protasov, *Polytope Lyapunov functions for stable and for stabilizable LSS*, arXiv 1406.5927, submitted to Found. Comput. Math. (2014).

6. M.Charina, C.Conti, N.Guglielmi, and V.Yu.Protasov, *Regularity of non-stationary subdivisions*, arXiv 1411.0497, submitted to SIAM J. Math. Anal. (2014).

7. V.Yu.Protasov and R.Jungers, *Stability of linear switching systems and Markov-Bernstein inequalities for exponents*, arXiv 1407.3927, submitted to IEEE Transactions on Automatic Control (2014).

8. V.Yu.Protasov and R.Jungers, *Resonance and marginal instability of switching systems*, arXiv 1411.0497, submitted to Nonlinear Analysis: Hybrid Systems (2014).

9. V.Yu.Protasov and A.S.Voynov, *Matrix semigroups with constant spectral radius*, arXiv 1407.6568, submitted to Advances in Mathematics.

Участие в конференциях и школах

1. International conference SMART2014, Понтиньяно, Сиена (Италия), 28 сентября - 1 октября 2014 *(пленарный доклад)* .

2. International conference "Wavelets and Applictions", Дели (Индия), 24-30 декабря 2014 *(пленарный доклад)* .

3. Лобачевские чтения, Казань, 23-26 октября 2014 *(пленарный доклад)* .

Работа в научных центрах и международных группах

University of L'Aquila (Аквила, Италия), январь 2014.
Gran Sassa Institute (Аквила, Италия), март 2014.
Catholic University Louvain (Лоувайн-ля-Нёв, Бельгия), май 2014.

Работа в редколлегиях журналов

член редколлегии журнала Математический Сборник
член редколлегии журнала Communications in Mathematics and Applications
член редколлегии журнала Квант

Оппонирование диссертаций

кандидатская диссертация С.С.Свистунова (Уральский Фед. Ун-т, Екатеринбург), декабрь 2013)

кандидатская диссертация Г.А.Дубосарского (ИММУрО РАН, Екатеринбург), июнь 2014.

Педагогическая деятельность

Преподавание.

Занятия со студентами по курсу *"Вариационное исчисление и оптимальное управление"* (МГУ, мех-мат)
Курс *"Математические методы в экономике"* (МГУ, мех-мат),
совместно с К.С.Рютиным и М.П.Заплетиным.

Со-руководитель двух спецсеминаров на мех-мате МГУ.

Курс *"Introduction to Wavelets"*, Gran Sassa Institute, Аквила (Италия).

Участие в проведении мех-матовской студенческой олимпиады,
а также олимпиады кафедры ОПУ "Экстремальные задачи"

Выступления с лекциями на выездном семинаре учителей математики (2-9 мая 2014) и на Республиканской конференции учителей Татарстана (Казань, 25 октября 2014).

Лекции для школьников в малом ШАД, Яндекс (Москва),
школах No 57 и No 218 (Москва), в лицее Лобачевского (Казань).

`Научное руководство.`

аспиранты:

Авксентьев Евгений, аспирантура мех-мата МГУ.
Войнов Андрей, аспирантура мех-мата МГУ.
Нилов Федор, аспирантура мех-мата МГУ.

студенты:

Лахтанов Иван (мех-мат МГУ, 3 курс);
Кузин Михаил (мех-мат МГУ, 3 курс).

`Работа со школьниками.`

Организация и работа в жюри геометрической олимпиады им. И.Ф.Шарыгина;
Работа в редколлегии журнала “Квант”.
Руководитель дипломных работ Натальи Басимовой (школа 2007, Москва, 10 кл.) и Романа Крутовского (школа 1514, Москва, 11 кл.).