Протасов Владимир Юрьевич

Отчет по гранту фонда Династия за 2015 год

Результаты, полученные в этом году

Я занимался задачами, связанными с ростом траекторий линейных динамических систем с переключениями, методами максимизации/минимизации спектрального радиуса, применением теории функциональных уравнений к исследованию бинарной функции разбиения Эйлера.

1. Рост траекторий линейных систем с переключениями. Мы исследуем динамическую систему вида

$$\dot{x}(t) \ = \ A(t)x(t)\,, \qquad t \in [0, +\infty), \tag{1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^d$, и матрица $A(t)$ может принимать значения на заданном компактном множестве $d \times d$-матриц $\mathcal{A}$. Подобные системы играют важную роль в приложениях и изучались во многих работах (монография Д.Либерзона, работы Молчанова, Пятницкого, Рапоппорта, Барабанова, Гурвица, Бланкини, Миани, и др.) Система называется *устойчивой*, если для любой измеримой функции $A(\cdot) : [0, +\infty) \ \to \ \mathcal{A}$, имеем $x(t) \to 0$, $t \to \infty$, т.е., все траектории системы стремятся к нулю. Устойчивость системы выражается в терминах ее *показателя Ляпунова* $\sigma(\mathcal{A})$ – максимальной экспоненты роста траекторий. Система устойчива тогда и только тогда когда $\sigma < 0$. Если же $\sigma = 0$, то система не имеет экспоненциально растущих траекторий, и в общем случае все ее траектории ограничены. Лишь в случае *резонанса* могут появляться траектории, растущие полиномиально, при этом степень полинома не превосходит степени резонанса. Этот феномен изучался в работе Читура, Масона и Сигалотти 2012 г., а также в нашей работе [2]. Как известно, в случае одной матрицы $\mathcal{A} = \{A\}$, степень полиномиального роста на единицу меньше размера жорданова блока матрицы A, соответствующего собственному значению с нулевой действительной частью.

Таким образом, *в случае одной матрицы степень полиномиального роста всегда целая.* Возникает естественный вопрос, выполнено ли это свойство в случае общих систем? В работе [5] мы даем исчерпывающий ответ. В размерности $d = 2$ степень полиномиального роста всегда целая. Более того, она равна либо 0 либо 1. Это значит, что любая система, у которой $\sigma(\mathcal{A}) = 0$, имеет либо ограниченные траектории, либо траектории, растущие линейно, и другие случаи невозможны. А при $d \geq 3$ ситуация принципиально иная: существуют системы сколь угодно медленного роста траекторий. Это значит, что для любого $d \geq 3$ и для любой возрастающей функции $\varphi(t)$ существует компактное множество $d \times d$ матриц $\mathcal{A}$, для которого система (1) имеет неограниченно растущие траектории, но все они растут медленнее, чем $\varphi(t)$. Правда, в соответствующих примерах множества матриц матриц $\mathcal{A}$ бесконечны. Однако, в той же работе [5] мы строим пример системы из двух матриц размера $d = 3$, для которой максимальные траектории $x(t)$ растут как $\sqrt{t},\ t \to \infty$.

2. Методы максимизации/минимизации спектрального радиуса матрицы. Проблема оптимизации спектрального радиуса на заданном компактном множестве матриц широко изучалась в связи с приложениями к теории графов, дифференциальным уравнениям, математической экономике (в частности, в модели Леонтьева), в теории систем (так называемые, асинхронные системы), и т.д. Спектральный радиус $\rho(A)$ – это наибольший из модулей собственных значений матрицы A. Функция $\rho(\cdot)$ не является, вообще говоря, ни выпуклой ни вогнутой, а в некоторых точках может терять липшицевость. Это объясняет сложность задачи и невозможность применения к ней классических методов оптимизации. В работе [1] мы представляем спектральный симплекс-метод для оптимизации спектрального радиуса на специальных множествах неотрицательных матриц, в которых i-тая строка выбирается независимо от остальных из заданного конечного множества $X_i \subset \mathbb{R}^d$, $i = 1, \ldots, d$. Доказано, что алгоритм не зацикливается и находит наименьший и наибольший спектральный радиус за конечное время. Эффективность метода продемонстрирована на численных примерах, в том числе, в больших размерностях (до тысячи). Метод распространен также на случай бесконечных множеств X_i. Например, если все эти множества – евклидовы шары, то матрица с минимальным спектральным радиусом строится в явном виде.

3. Исследование бинарной функции разбиения Эйлера с помощью функциональных уравнений. Для прозвольного множества $D \subset \mathbb{Z}_+$ целых неотрицательных чисел, называемого *словарем*, рассматривается величина $b_D(k)$ равная количеству различных представлений натурального числа k в виде суммы $k = \sum\limits_{j=0}^{\infty} d_j\, 2^j$, в которой все "цифры" d_j принадлежат D. Эта величина называется *бинарной функцией разбиения* числа k. Задача состоит в характеризации асимптотического роста $b_D(k)$ при $k \to \infty$. Она изучалась еще Л.Эйлером для случая $D = \mathbb{Z}_+$. Асимптотика для этого случая была найдена Малером в 1940, затем уточнялась в работах де Брёйна (1948), Пеннингтона (1953), Кнута (1966), Фрёйберга (1997). Бинарная функция разбиения для конечных словарей была впервые изучена Б.Резником (1990), где рассматривался случай *полного словаря* $D = \{0, 1, \ldots, n\}$. Ясно, что при $n = 1$ имеем $b_D(k) \equiv 1$. При остальных n функция разбиения имеет нетривиальную асимптотику. Резник нашел точную асимптотику в случае нечетных n, а также для $n = 2$, оставив четные $n > 2$ в качестве открытой проблемы. Для небольших значений n эта задача решалась в работах Дюмонта, Сидорова и Томаса (1999), Протасова (2000), Харе (2015), и т.д., а близкие задачи исследовались Фенгом и Сидоровым (2011), Фенгом, Лиабертом и Томасом (2014), и т.д.

В работе [4] представлен новый подход к изучению бинарной функции разбиения, основанный на применении *масштабирующих уравнений*, разностных функциональных уравнений со сжатием аргумента. Аппарат масштабирующих уравнений был разработан в 1990-х для построения систем всплесков с компактным носителем. Оказывается, бинарная функция разбиения тесно связана с масштабирующим уравнением, коэффициенты которого определяются словарем D. Новый подход позволил охарактеризовать асимптотическое поведение $b_D(k)$ при $k \to \infty$ для всех конечных словарей D, а не только для полных, как было в предшествующих работах, вычислить асимптотики роста в виде совместных спектральных характеристик определенных булевских матриц, а также найти словари, для которых функция разбиения имеет регулярный полиномиальный рост.

Работы, опубликованные и принятые к публикации в 2015 г.

1. V.Yu.Protasov, *Spectral simplex method*, Mathematical Programming (2015), DOI 10.1007/s10107-015-0905-2.

2. (joint with R.Jungers) *Resonance and marginal instability of switching systems*, Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 17 (2015), 81–93.

3. (совм. с А.С.Войновым), *Компактные несжимающие полугруппы аффинных операторов*, Матем. Сб., 206 (2015), no 7, 33—54.

4. *The Euler binary partition function and subdivision schemes*, Mathematics of Computation, to appear (2015).

5. *Linear switching systems with slow growth of trajectories*, Systems and Control Letters, to appear (2015).

6. (joint N.Guglielmi) *Invariant polytopes of linear operators with applications to regularity of wavelets and of subdivisions*, SIAM J. Matrix Anal., to appear (2015).

7. (joint with M.Charina, C.Conti, and N.Guglielmi) *Limits of level and parameter dependent subdivision schemes: a matrix approach*, Applied Mathematics and Computation, to appear (2015).

8. (joint with N.Guglielmi) *Matrix approach to the global and local regularity of wavelets*, Poincare Journal of Analysis and Applications, to appear, No 2, (2015).

9. (joint with N.Guglielmi and L.Laglia) *Polytope Lyapunov functions for stable and for stabilizable LSS*, Foundations of Comput. Math., to appear (2016)

10. (joint with R.Jungers) *Estimating the discretization parameter of linear systems via Chebyshev polynomials*, IEEE Trans. Automatic Control, to appear (2016).

Участие в конференциях и школах

1. International Workshop on Combinatorics and Applications in SJTU, Шанхай (Китай), 21 – 27 апреля 2015,

`(пленарный доклад)`: *Perron-Frobenius theory for matrix semigroups.*

2. International conference “Wavelets and Applications”, 18 – 23 июня 2015,
(пленарный доклад): *Regularity of wavelets and subdivisions: a recent progress*

3. International conference MMMA-2015 (Сколково, Москва, Россия), 24-28 августа 2015
(пленарный доклад): *Spectral simplex method*

4. International conference on Discrete Geometry, in the framework of The 5th German-Russian Week of the Young Researcher, (Долгопрудный, Россия),
(пленарный доклад): *Invariant zonoids and L_1 spectral radius of matrices.*

Работа в научных центрах и международных группах

University of L'Aquila and Gran Sassa Institute (Аквила, Италия), апрель 2015.
Catholic University Louvain (Лоувайн-ля-Нёв, Бельгия), май 2015.
Shanghai Jiao Tong University (ноябрь 2015).

Работа в редколлегиях журналов

член редколлегии журнала Математический Сборник

член редколлегии журнала Communications in Mathematics and Applications

член редколлегии журнала Квант

Педагогическая деятельность

Преподавание.

Занятия со студентами по курсу *“Вариационное исчисление и оптимальное управление”* (МГУ, мех-мат)
Курс *“Математические методы в экономике”* (МГУ, мех-мат),
совместно с К.С.Рютиным и М.П.Заплетиным.

Со-руководитель двух спецсеминаров на мех-мате МГУ.

Курс *“Introduction to Wavelets”*, Gran Sassa Institute, Аквила (Италия).

Мини-курс *“Волны и всплески”*, Летняя Школа “Современная Математика”, Дубна, 19–28 июля 2015.

Работа в жюри Геометрической олимпиады им. И.Ф.Шарыгина.

Участие в проведении мех-матовской студенческой олимпиады,
а также олимпиады кафедры ОПУ “Экстремальные задачи”

Работа в приемной комиссии мех-мата МГУ.

Выступления с лекциями на Фестивале Науки в Москве (11-12 октября, 2015), и на Геометрической олимпиаде им. И.Ф.Шарыгина (Дубна, 29 июля – 1 августа 2015).

Научное руководство.

руководство диссертациями:

Авксентьев Евгений, подготовлена кандидатская диссертация, защита – декабрь 2015.

Войнов Андрей, подготовлена кандидатская диссертация, защита – февраль 2016.

аспиранты:

Нилов Федор, аспирантура мех-мата МГУ.

студенты:

Лахтанов Иван (мех-мат МГУ, 4 курс);

Кузин Михаил (мех-мат МГУ, 4 курс).

Работа со школьниками.

Руководитель дипломной работы Романа Крутовского (школа 1514, Москва, 11 кл.).