Протасов Владимир Юрьевич

Отчет по гранту фонда Династия за 2016 год

Результаты, полученные в этом году

Я занимался задачами, связанными с устойчивостью линейных динамических систем на графах, стабилизации положительных линейных систем и гладкостью всплесков многих переменных.

1. Линейные динамические системы на графах. Подобные системы являются обобщениями классических линейных систем с переключениями, активно исследуемых в литературе, начиная с 1980-х годов. Задан конечный ориентированный мультиграф G, каждой вершине которого соответствует некоторое линейное пространство, а каждому ребру – линейное отображение из одного пространства в другое. Таким образом, если задать начальную точку в одном из пространств, то каждому пути по графу из этой вершины соответствует траектория данной точки под действием композиции операторов, лежащих на ребрах данного пути. Система называется устойчивой если все ее траектории стремятся к нулю. Классические системы с переключениями соответствуют случаю мультиграфа с одной вершиной. Они нашли многочисленные применения в теории электрических цепей, социологии, теории систем и т.д. Задачи устойчивости систем на графах начали исследоваться относительно недавно в работах Даи, Козякина, Юнгерса, Филлипа, и др. В работе [12] мы строим общую теорию таких систем, разрабатываем технику их факторизации, а также доказываем существование инвариантного семейства функций Ляпунова. Мы приводим алгоритм построения кусочно-линейной функции Ляпунова, с помощью которой эффективно решается вопрос об устойчивости системы.

2. Методы стабилизации положительной системы (поиска ближайшей устойчивой/неустойчивой матрицы). Рассматривается дискретная динамическая система с постоянными коэффициентами:

$$x_{k+1} \quad = \quad Ax_k\,, \qquad k \in \mathbb{N},$$

где A – заданная $d \times d$ матрица. Система называется устойчивой, если все ее траектории (т.е., последовательности $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$) ограничены при $k \to \infty$, система называется асимптотически устойчивой, если все ее траектории стремятся к нулю при $k \to \infty$. Известно, что система устойчива если все собственные значения ее матрицы лежат в единичном круге комплексной плоскости, а значения, лежащие на границе круга (если есть) не имеют жордановых клеток размера больше 1. Система асимптотически устойчива, если все собственные лежат во внутренности единичного круга.

В многочисленных приложениях возникает задача поиска ближайшей устойчивой системы. Именно, для заданной матрицы A найти устойчивую матрицу B, для которой расстояние $\|A - B\|$ минимально. При этом, матричная норма $\|M\|$ – любо спектральная (операторная норма евклидова пространства), либо норма Фробениуса (корень из суммы квадратов элементов матрицы). Аналогично ставится задача поиска ближайшей асимптотически неустойчивой матрицы. Обе задачи известны своей сложностью и исследовалась в многочисленных работах. В работе [5] нами предложен способ точного решения этой задачи для определенного класса неотрицательных матриц – спектральный симплекс метод. Указаны приложения этого метода к задаче об оптимизации спектрального радиуса графа, а также к задаче оптимизации расходов в модели Леонтьева. Нами также разработан итерационный метод приближенного решения этих задач для произвольной неотрицательной матрицы.

3. Определение гладкости всплесков многих переменных. Всплесками называются функции, полученные из одной и той же функции с помощью целых сжатий и сдвигов аргумента и образующие базис в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$. Всплески показали свою исключительную эффективность в задачах обработки сигналов, передачи и хранения информации, численного решения дифференциальных уравнений, и т.д. Гладкость всплесков отвечает за скорость их аппроксимации и потому является важной характеристикой. В начале 1990-х гг. усилиями Добеши, Лагариаса, Мичелли, Дамена, Каваретты, Хейля, Вонга, Стрэнга и др. был разработан матричный метод вычисления показателей гладкости всплесков одной переменной. На случай многих переменных он был обобщен лишь в одной частной ситуации, когда матрица сжатия аргумента является изотропной (т.е., все ее собственные значения равны по модулю и она диагонализируется в базисе собственных векторов). Вопрос о возможности обобщения для общих матриц сжатия оставался открытым в течение двух десятилетий. Мы даем ответ на этот вопрос в готовящейся к выходу монографии [13], где разрабатываем матричный метод для функций любого числа переменных с любой допустимой матрицей сжатия.

Работы, опубликованные и поданные в печать в 2016 г.

1. V.Yu.Protasov, *Linear switching systems with slow growth of trajectories*, System & Conttol Letters, 90 (2016), 54-–60.

2. N.Guglielmi, V.Yu.Protasov, *Invariant polytopes of linear operators with applications to regularity of wavelets and of subdivisions*, SIAM J. Matrix Anal., 37 (2016), no 1, 18–52.

3. M.Charina, C.Conti, N.Guglielmi, V.Yu.Protasov, *Limits of level and parameter dependent subdivision schemes: A matrix approach*, Applied Mathematics and Computation, 272 (2016), 20-–27.

4. V.Yu.Protasov and R.Jungers, *Analysing the stability of linear systems via exponential Chebyshev polynomials*, IEEE Trans. Automatic Control, 61 (2016), no 3, 795–798.

5. V.Yu.Protasov, *Spectral simplex method*, Mathematical Programming 156 (2016), 156 (2016), no. 1-2, Ser. A, 485-–511.

6. J.Brihkhuis and V.Yu.Protasov, *A new proof of the Lagrange multiplier rule*, Operations Research Letters, 44 (2016), 400–402.

7. M.Charina, C.Conti, N.Guglielmi, V.Yu.Protasov, *Regularity of non-stationary subdivision: a matrix approach*, Numerische Mathematik (2016), published online, DOI: 10.1007/s00211-016-0809-y.

8. V.Yu.Protasov, *The Euler binary partition function and subdivision schemes*, Mathematics of computation (2016), published online, DOI: 10.1090/mcom/3128

9. N.Guglielmi L.Laglia, and V.Yu.Protasov, *Polytope Lyapunov functions for stable and for stabilizable LSS*, Foundations of Comput. Math. (2016), published online, DOI: 10.1007/s10208-015-9301-9.

10. V.Yu.Protasov and A.S.Voynov, *Matrix semigroups with constant spectral radius*, to appear in Linear Algebra Appl. (2016), arXiv:1407.6568.

11. E.A.Avksentiev and V.Yu.Protasov, *Universal measure for Poncelet type theorems*, submitted to Transactions of the American Math. Soc., (2016) arXiv:1610.00276

12. A.Cicone, N.Guglielmi, and V.Yu.Protasov, *Linear dynamical systems on graphs*, submitted to Journal Of The European Mathematical Society (2016), arXiv:1607.00415

13. A.Krivoshein, V.Protasov, and M.Skopina, *Multivariate wavelet frames*, to appear in Springer (2016), 293 pp.

Участие в конференциях и школах

1. International Workshop "Optimization without Borders", Les Houches, France, February 7–12, 2016.

(пленарный доклад):*: How to optimize the spectral radius of a matrix ?*

2. Международная конференция по алгебре, анализу и геометрии, Казань, 26 июня – 2 июля 2016 г.

(пленарный доклад): *Совместный спектральный радиус: как найти и как применить?*

Работа в научных центрах и международных группах

University of L'Aquila and Gran Sassa Institute (Аквила, Италия), март 2016.
University of Wien (Вена, Австрия), июль 2016.
Hong Kong University of Science and Technology (Гонконг), май 2016.

Работа в редколлегиях журналов

член редколлегии журнала “Математический Сборник”

член редколлегии журнала “Квант”

член редколлегии журнала “Applied Mathematics and Computation” (издательство Elsevier)

член редколлегии журнала “Analysis Mathematica” (издательство Springer)

Оппонирование диссертаций

Кандидатская диссертация Петровой Е.А. (УрГУ, Екатеринбург), “Комбинаторные свойства бесповторных языков”. Защита состоялась 25.05.2016 в диссертационном совете ПОМИ РАН (Ст.Петербург).

Педагогическая деятельность

`Преподавание.`

Занятия со студентами по курсу *“Вариационное исчисление и оптимальное управление”* (МГУ, мех-мат)

Лекции и занятия со студентами по курсу *“Дифференциальные уравнения”* (Факультет компьютерных наук, Высшая Школа Экономики)

Курс *“Математические методы в экономике”* (МГУ, мех-мат),
совместно с К.С.Рютиным и М.П.Заплетиным.

Со-руководитель двух спецсеминаров на мех-мате МГУ.

Курс *“Optimal Control”*, Gran Sassa Institute, Аквила (Италия).

Мини-курс *“Синусоида и фрактал”*, Летняя Школа “Современная Математика”, Дубна, 19–28 июля 2015.

Работа в жюри Геометрической олимпиады им. И.Ф.Шарыгина.

Участие в проведении мех-матовской студенческой олимпиады, а также олимпиады кафедры ОПУ “Экстремальные задачи”

Выступления с лекциями на Геометрической олимпиаде им. И.Ф.Шарыгина (Дубна, 29 июля – 1 августа 2016) и в школах.

`Научное руководство.`

руководство диссертациями:

Войнов Андрей, подготовлена кандидатская диссертация, защита – октябрь 2016.

студенты:

Лахтанов Иван (мех-мат МГУ, 5 курс);
Кузин Михаил (мех-мат МГУ, 5 курс).

`Работа со школьниками.`

Руководитель дипломной работы Романа Крутовского (школа 1514, Москва, 11 кл.).

Краткие итоги за три года

В 2014 – 2016 гг. я занимался задачами в рамках заявленной темы моего проекта “Линейные системы с переключениями: критерии устойчивости и приложения”. За время проекта мною опубликовано 14 работ в научных журналах, подготовлена к печать одна монография, сделано 8 пленарных докладов на международных конференциях. Основные цели, поставленные в 2013 году в заявке на проект, удалось достичь, хотя некотрые задачи остались не решены или решены не в полном объеме. Ниже мы приводим краткие положения из плана исследования и сравниваем их с фактическими результатами.

– Мы планируем обобщить метод инвариантных многогранников на непрерывные системы.

Задача полостью решена. Обобщенный метод разработан в статье [9].

– Для этого нужно, в частности, уметь эффективно оценивать длину шага дискретизации непрерывной системы. Решение использует неравенства типа Маркова-Бернштейна для полиномов по системам экспонент. Мы предполагаем получить решение в общем случае.

В работе [4] получено решение в случае матриц с действительным спектром. В общем случае задача не решена.

– Для исследования устойчивости положительных систем с вероятностью 1 (стремление к нулю почти всех траекторий) нами разработан новый алгоритм вычисления показателя Ляпунова неотрицательных матриц, усилен ряд утверждений теоремы В.Оселедца для этого случая, а также доказана гипотеза Ж.Коэна для неотрицательных матриц. Я надеюсь усовершенствовать полученный алгоритм, используя современные методы выпуклой оптимизации.

Задача не решена.

– Планируется применить полученные результаты к приложениям: задаче, о локальной гладкости известных всплеск-функций (действительный анализ)

Эта и смежные задачи решены в работах [2, 3, 7], а также в монографии [13] .

– ... об асимптотике обобщенной функции разбиения Эйлера (теория чисел)

Задача решена в работе [8].

... и о примитивности семейств неотрицательных матриц.

Задача решена в совместной работе с А.Войновым в 2015 г.