ОТЧЕТ

Шрамова Константина Александровича
по гранту Фонда “Династия”

1. Результаты 2015 года

1.1. **Геометрия двойных накрытий $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в квартике.** В 2015 году совместно с В. Пржиялковским и И. Чельцовым я изучал геометрию особых двойных накрытий $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в квартике. Такие многообразия интересны с точки зрения препятствий к рациональности. Для гладких многообразий этого типа нерациональность была доказана в 80-е годы А. Тихомировым и К. Вуазен при помощи промежуточных якобианов. Чуть позже А. Бовилем был доказан такой же результат в предположении, что многообразие имеет одну обыкновенную двойную особенность; в этом случае доказательство оказалось даже проще, чем для гладких многообразий, так как особая точка дает бирациональную структуру расслоения на коники, а теория промежуточных якобианов расслоений на коники хорошо развита. Позже О. Дебарр рассматривал двойные накрытия $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в квартике с не более чем пятью особыми точками, и доказал их нерациональность при условии общности, а Р. Варлей рассматривал специальное подсемейство с шестью обыкновенными двойными точками (и также доказал в этом случае нерациональность).

С другой стороны, в 1971 году М. Артин и Д. Мамфорд построили двойное накрытие $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в квартике с десятью обыкновенными двойными особенностями, для которого им удалось доказать стабильную нерациональность (и в частности просто нерациональность), используя нетривиальное кручение в третьих когомологиях. В 2013 году К. Вуазен придумала, как вывести из этого стабильную нерациональность очень общего двойного накрытия с $k \leqslant 7$ обыкновенными двойными особенностями.

Целью нашей совместной работы с В. Пржиялковским и И. Чельцовым была теорема, которая была бы аналогична предыдущей теореме К. Вуазен и в то же время (при несколько более слабом утверждении и несколько более сильных предположениях) не предполагала бы общности многообразия. В результате удалось доказать следующий результат: любое двойное накрытие $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в квартике с не более чем шестью обыкновенными двойными особенностями нерационально. Кроме того, было установлено, что всякое двойное накрытие $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в квартике, имеющее больше десяти обыкновенных особых точек, рационально.

1.2. **Симметричные двойные накрытия $\mathbb{P}^3$.** В другой совместной работе с В. Пржиялковским и И. Чельцовым изучались двойные накрытия $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в квартике, чья группа автоморфизмов содержит группу вращений икосаэдра $\mathfrak{A}_5$. Интерес к многообразиям с действием этой группы возник из исследования вопроса о классах сопряженности конечных простых подгрупп в группе Кремоны ранга 3. Мы классифицировали все многообразия такого типа с действием группы $\mathfrak{A}_5$. Выяснилось, что они образуют одно двумерное семейство особых многообразий, общий член которого рационален, одно одномерное семейство, общий член которого неособ (и поэтому нерационален), а среди особых членов имеется по крайней мере два рациональных многообразия, и ещё одно одномерное семейство, общий член которого неособ, а особые члены имеют обыкновенные двойные особенности. Последний случай соответствует действию группы $\mathfrak{A}_5$ на $\mathbb{P}^3$, возникающему из проективизации неприводимого четырехмерного представления $\mathfrak{A}_5$. В этом случае семейство содержит одно многообразие X_5 с пятью обыкновенными двойными особенностями, два многообразия X_{10} и X'_{10} с десятью обыкновенными двойными особенностями, и одно многообразие X_{15} с пятнадцатью обыкновенными двойными особенностями. Мы выяснили, что многообразие X_5 нерационально (это получилось как следствие из основного результата предыдущей работы), многообразие X_{10} является частным случаем примера Артина–Мамфорда и потому нерационально и даже стабильно нерационально, а многообразие X'_{10} не является многообразием Артина–Мамфорда (и про его рациональность мы не смогли ничего понять). Наконец, многообразие X_{15} является нерациональным, но не имеет эквивариантных относительно группы $\mathfrak{A}_5$ бирациональных перестроек в $\mathbb{P}^3$; в качестве следствия из этого результата было получено новое вложение группы $\mathfrak{A}_5$ в группу Кремоны ранга 3.

1.3. **Трехмерные квартики Тодда.** В другой совместной работе с И. Чельцовым исследовались трехмерные квартики с группами автоморфизмов, содержащими симметрическую группу $\mathfrak{S}_6$. Известно (и легко проверить), что все такие квартики образуют одномерное семейство, общий член которого — квартика с 30 особыми точками. Кроме того, это семейство содержит одну квартику с 45 особыми точками (так называемую квартику Бурхарда), одну квартику с неизолированными особенностями (квартику Игусы), одну квартику Y_{36} с 36 особыми точками, и одну квартику Y_{40} с 40 особыми точками. Недавно А. Бовиль изучил действие группы автоморфизмов на промежуточных якобианах разрешений особенностей таких многообразий и доказал, что все $\mathfrak{S}_6$-симметричные квартики, кроме квартик Бурхарда и Игусы, а также квартик Y_{36} и Y_{40}, нерациональны. С другой стороны, давно известно, что квартики Бурхарда и Игусы рациональны. Мы доказали рациональность оставшихся двух квартик Y_{36} и Y_{40}. Обе конструкции рациональности были проведены явно. Одна из них является частным случаем бирационального отображения из $\mathbb{P}^3$ линейной системой квартик, проходящих через шесть скрещивающихся прямых; такое отображение было найдено Дж. Тоддом в 1933 году (однако оригинальное доказательство довольно туманно, так что в нашем частном случае мы придумали новое). Другая конструкция задается бирациональным отображением из $\mathbb{P}^3$ линейной системой квартик, проходящих через десять прямых, которые образуют специальную конфигурацию; такое отображение было найдено Дж. Тоддом в 1935 году, причем наш случай является вырождением его конструкции. В нашем случае бирациональное отображение из $\mathbb{P}^3$ в Y_{36} оказалось эквивариантным относительно подгруппы $\mathfrak{A}_6 \subset \mathfrak{S}_6$, а отображение из $\mathbb{P}^3$ в Y_{40} — эквивариантным относительно подходящим образом выбранной подгруппы $\mathfrak{S}_5 \subset \mathfrak{S}_6$.

1.4. **Эквивариантная бирациональная жесткость.** Еще в одном совместном исследовании с И. Чельцовым изучалось действие группы икосаэдра $\mathfrak{A}_5$ на гладком трехмерном многообразии Фано V_5 индекса 2 и антиканонической степени 40. Такое многообразие единственно с точностью до изоморфизма, и его группа автоморфизмов содержит единственную с точностью до сопряженности подгруппу $\mathfrak{A}_5$. Была изучена $\mathfrak{A}_5$-эквивариантная геометрия многообразия V_5, описаны все $\mathfrak{A}_5$-орбиты длины меньше $|\mathfrak{A}_5| = 60$, инвариантные кривые малых степеней, а также $\mathfrak{A}_5$-инвариантные дивизоры малых степеней. Была доказана $\mathfrak{A}_5$-инвариантная бирациональная жесткость многообразия V_5 и описана его группа $\mathfrak{A}_5$-эквивариантных бирациональных автоморфизмов. Отметим, что V_5 является единственным неособым трехмерным многообразием Фано с действием $\mathfrak{A}_5$, которое при этом $\mathfrak{A}_5$-бирационально жестко. В процессе доказательства были доработаны существующием методы теории эквивариантной бирациональной жесткости, и само доказательство было проделано двумя (частично перекрывающимися) способами. Соответствующий материал был включен в качестве основной иллюстрации в монографию по эквивариантной бирациональной жесткости, которая была закончена и опубликована в этом году.

2. Работы

2.1. Препринты. Была опубликована в виде препринта и принята к печати статья:

> Ivan Cheltsov, Victor Przyjalkowski, Constantin Shramov, Quartic double solids with icosahedral symmetry, arXiv:1508.07282, принято к печати в European Journal of Mathematics

Были опубликованы препринты на архиве:

(1) Ivan Cheltsov, Victor Przyjalkowski, Constantin Shramov, Which quartic double solids are rational? arXiv:1508.07277
(2) Ivan Cheltsov, Constantin Shramov, Two rational nodal quartic threefolds, arXiv:1511.07508

2.2. Монография. Вышла из печати монография:

> Ivan Cheltsov, Constantin Shramov, Cremona groups and the icosahedron, CRC Press, 2015

2.3. Учебное пособие. Совместно с С. Горчинским было закончено учебное пособие по неразветвленной группе Брауэра и ее приложениям на основании записок семинара НОЦ МИАН 2011 года. В него (в основном в форме задач) вошел стандартный материал о когомологиях групп, группе Брауэра, препятствиям к стабильной рациональности, поверхностях Шатле, конструкции нерационального стабильно рационального многообразия, и препятствии Брауэра–Манина.

> Sergey Gorchinskiy, Constantin Shramov, Unramified Brauer group and its applications (Неразветвлённая группа Брауэра и её приложения), arXiv:1512.00874

3. Участие в конференциях и семинарах

В 2015 году я принимал участие в следующих мероприятиях:

(1) Семинар отдела алгебры и теории чисел и отдела алгебраической геометрии МИАН (семинар И. Р. Шафаревича), МИАН, Москва, 24.03.2015, доклад “Особые двойные накрытия проективного пространства с ветвлением в квартике”
(2) Algebra seminar of the University of Oregon, Юджин, США, 13.04.2015, доклад “Non-rational Varieties”
(3) Algebra seminar of the University of Oregon, Юджин, США, 14.04.2015, доклад “Boundedness of Birational Automorphisms”

(4) Algebraic geometry seminar of the Courant Institute, Нью-Йорк, США, 16.04.2015, доклад “Boundedness properties for birational automorphisms”
(5) Workshop on rationally connected varieties, ВШЭ, Москва, 18-22.05.2015, доклад “Irrational singular quartic double solids”
(6) Algebraic Geometry and Applications to Physics and Dynamics, Институт им.Эйлера, Санкт-Петербург, 25-29.05.2015, доклад “Irrational singular quartic double solids”
(7) Colloquium of the University of Liverpool, Ливерпуль, Великобритания, 11.06.2015, доклад “Finite groups of birational automorphisms”
(8) Algebraic Geometry seminar of the University of Liverpool, Ливерпуль, Великобритания, 12.06.2015, доклад “Irrational singular quartic double solids”
(9) Algebraic Geometry seminar of Pohang Institute of Science and Technology, Поханг, Южная Корея, 29.10.2015, доклад “Automorphisims of Fano threefolds”

4. Организация конференций и семинаров

Я являюсь (совместно с Д. Орловым, Ю. Прохоровым и В. Пржиялковским) соруководителем семинара Исковских, проходящего в МИАН. Также являюсь (совместно с Д. Орловым и Ю. Прохоровым) соруководителем учебного семинара по алгебраической геометрии в научно-образовательном центре МИАН. Принимал участие (совместно с С. Галкиным и Н. Курносовым) в организации конференции “Projective Algebraic Geometry”, посвященной 65-летию Ф. Зака, в ВШЭ, Москва, 7–12 декабря. Принимал участие (совместно с Дж. Парком, В. Пржиялковским, О. Стариковой и И. Чельцовым) в организации конференции “Magadan Algebraic Geometry International Conference” в Магадане, 7–11 декабря.