ИТОГОВЫЙ ОТЧЕТ

Шрамова Константина Александровича
по гранту Фонда "Династия"

1. Результаты

1.1. **Многообразие дель Пеццо степени 5.** В 2014 году совместно с И. Чельцовым я изучал эквивариантную бирациональную геометрию трехмерных рациональных многообразий Фано относительно "больших" подгрупп в их группах автоморфизмов, а также соответствующие вложения этих групп в группу бирациональных автоморфизмов трехмерного проективного пространства над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 (так называемую группу Кремоны Cr_3 ранга 3). Изначальной мотивировкой было желание построить несопряженные вложения некоторых простых конечных групп в группу Cr_3.

В то время как группа бирациональных автоморфизмов проективной плоскости изучена весьма хорошо, общая структура группы Cr_3 остается малопонятной. С другой стороны, известны частичные результаты про ее конечные подгруппы. Например, Ю. Прохоров доказал, что если конечная простая неабелева группа G вкладывается в Cr_3, то G является одной из групп $\mathfrak{A}_5$, $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$, $\mathfrak{A}_6$, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_8)$, $\mathfrak{A}_7$ или $\mathrm{PSp}_4(\mathbb{F}_3)$. Более того, известна полная классификация вложений трех последних групп в группу Cr_3 с точностью до сопряженности. А именно, все вложения каждой из групп $\mathfrak{A}_7$ и $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_8)$ в группу Cr_3 сопряжены друг другу, и существует ровно два несопряженных вложения группы $\mathrm{PSp}_4(\mathbb{F}_3)$ в Cr_3. Количество классов сопряженности для остальных подгрупп из этого списка неизвестны, и ожидается, что их довольно много (возможно, бесконечное число), и в целом соответствующий вопрос становится сложнее, если размер группы уменьшается.

Мы рассмотрели действие группы $\mathfrak{A}_5$ на гладком трехмерном многообразии Фано V_5, которое является сечением грассманиана $\mathrm{Gr}(2,5)$ в Плюккеровом вложении при помощи подпространства размерности 6. Это рациональное многообразие Фано индекса 2 и антиканонической степени 40, и все гладкие многообразия такого типа изоморфны друг другу. Оказалось, что многообразие V_5 является $\mathfrak{A}_5$-бирационально жестким. Доказательство этого потребовало изучения многих весьма частных геометрических свойств действия группы $\mathfrak{A}_5$ на V_5. Например, мы классифицировали все $\mathfrak{A}_5$-инвариантные кривые малых степеней на V_5, и описали свойства интересных $\mathfrak{A}_5$-инвариантных поверхностей на V_5. Кроме $\mathfrak{A}_5$-бирациональной жесткости V_5, которая по существу означает отсутствие нетривиальных $\mathfrak{A}_5$-эквивариантных бирациональных структур расслоения с рационально связными слоями на этом многообразии, мы заодно классифицировали все бирациональные $\mathfrak{A}_5$-эквивариантные структуры расслоений на V_5, слои которых являются эллиптическими кривыми (такая структура оказалась единственной), и расслоений, слои которых являются поверхностями $K3$ (такая структура тоже оказалась единственной). Кроме этого, мы выяснили структуру нормализатора соответствующего вложения группы $\mathfrak{A}_5$ в Cr_3.

1.2. **Геометрия двойных накрытий $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в квартике.** В 2015 году совместно с В. Пржиялковским и И. Чельцовым я изучал геометрию особых двойных накрытий $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в квартике. Такие многообразия интересны с точки зрения препятствий к рациональности. Для гладких многообразий этого типа нерациональность была доказана в 80-е годы А. Тихомировым и К. Вуазен при помощи промежуточных якобианов. Чуть позже А. Бовилем был доказан такой же результат в предположении, что многообразие имеет одну обыкновенную двойную особенность; в этом случае доказательство оказалось даже проще, чем для гладких многообразий, так как особая точка дает бирациональную структуру расслоения на коники, а теория промежуточных якобианов расслоений на коники хорошо развита. Позже О. Дебарр рассматривал двойные накрытия $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в квартике с не более чем пятью особыми точками, и доказал их нерациональность при условии общности, а Р. Варлей рассматривал специальное подсемейство с шестью обыкновенными двойными точками (и также доказал в этом случае нерациональность).

С другой стороны, в 1971 году М. Артин и Д. Мамфорд построили двойное накрытие $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в квартике с десятью обыкновенными двойными особенностями, для которого им удалось доказать стабильную нерациональность (и в частности просто нерациональность), используя нетривиальное кручение в третьих когомологиях. В 2013 году К. Вуазен придумала, как вывести из этого стабильную нерациональность очень общего двойного накрытия с $k \leqslant 7$ обыкновенными двойными особенностями.

Целью нашей совместной работы с В. Пржиялковским и И. Чельцовым была теорема, которая была бы аналогична предыдущей теореме К. Вуазен и в то же время (при несколько более слабом утверждении и несколько более сильных предположениях) не предполагала бы общности многообразия. В результате удалось доказать следующий результат: любое двойное накрытие $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в квартике с не более чем шестью обыкновенными двойными особенностями нерационально. Кроме того, было установлено, что всякое двойное накрытие $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в квартике, имеющее больше десяти обыкновенных особых точек, рационально.

1.3. **Симметричные двойные накрытия $\mathbb{P}^3$.** В другой совместной с В. Пржиялковским и И. Чельцовым работе 2015 года изучались двойные накрытия $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в квартике, чья группа автоморфизмов содержит группу вращений икосаэдра $\mathfrak{A}_5$. Интерес к многообразиям с действием этой группы возник из исследования вопроса о классах сопряженности конечных простых подгрупп в группе Кремоны ранга 3. Мы классифицировали все многообразия такого типа с действием группы $\mathfrak{A}_5$. Выяснилось, что они образуют одно двумерное семейство особых многообразий, общий член которого рационален, одно одномерное семейство, общий член которого неособ (и поэтому нерационален), а среди особых членов имеется по крайней мере два рациональных многообразия, и ещё одно одномерное семейство, общий член которого неособ, а особые члены имеют обыкновенные двойные особенности. Последний случай соответствует действию группы $\mathfrak{A}_5$ на $\mathbb{P}^3$, возникающему из проективизации неприводимого четырехмерного представления $\mathfrak{A}_5$. В этом случае семейство содержит одно многообразие X_5 с пятью обыкновенными двойными особенностями, два многообразия X_{10} и X'_{10} с десятью обыкновенными двойными особенностями, и одно многообразие X_{15} с пятнадцатью обыкновенными двойными особенностями. Мы выяснили, что многообразие X_5 нерационально (это получилось как следствие из основного результата предыдущей работы), а многообразие X_{10} является частным случаем примера Артина–Мамфорда и потому нерационально и даже стабильно нерационально. Наконец, многообразие X_{15} является нерациональным, но не имеет эквивариантных относительно группы $\mathfrak{A}_5$ бирациональных перестроек в $\mathbb{P}^3$; в качестве следствия из этого результата было получено новое вложение группы $\mathfrak{A}_5$ в группу Кремоны ранга 3.

1.4. **Трехмерные квартики Тодда.** В другой совместной с И. Чельцовым работе 2015 года исследовались трехмерные квартики с группами автоморфизмов, содержащими симметрическую группу $\mathfrak{S}_6$. Известно (и легко проверить), что все такие квартики образуют одномерное семейство, общий член которого — квартика с 30 особыми точками. Кроме того, это семейство содержит одну квартику с 45 особыми точками (так называемую квартику Бурхарда), одну квартику с неизолированными особенностями (квартику Игусы), одну квартику Y_{36} с 36 особыми точками, и одну квартику Y_{40} с 40 особыми точками. Недавно А. Бовиль изучил действие группы автоморфизмов на промежуточных якобианах разрешений особенностей таких многообразий и доказал, что все $\mathfrak{S}_6$-симметричные квартики, кроме квартик Бурхарда и Игусы, а также квартик Y_{36} и Y_{40}, нерациональны. С другой стороны, давно известно, что квартики Бурхарда и Игусы рациональны. Мы доказали рациональность оставшихся двух квартик Y_{36} и Y_{40}. Обе конструкции рациональности были проведены явно. Одна из них является частным случаем бирационального отображения из $\mathbb{P}^3$ линейной системой квартик, проходящих через шесть скрещивающихся прямых; такое отображение было найдено Дж. Тоддом в 1933 году (однако оригинальное доказательство довольно туманно, так что в нашем частном случае мы придумали новое). Другая конструкция задается бирациональным отображением из $\mathbb{P}^3$ линейной системой квартик, проходящих через десять прямых, которые образуют специальную конфигурацию; такое отображение было найдено Дж. Тоддом в 1935 году, причем наш случай является вырождением его конструкции. В нашем случае бирациональное отображение из $\mathbb{P}^3$ в Y_{36} оказалось эквивариантным относительно подгруппы $\mathfrak{A}_6 \subset \mathfrak{S}_6$, а отображение из $\mathbb{P}^3$ в Y_{40} — эквивариантным относительно подходящим образом выбранной подгруппы $\mathfrak{S}_5 \subset \mathfrak{S}_6$.

1.5. **Квартика Бурхарда и секстика Барта.** В 2016 году совместно с И. Чельцовым и В. Пржиялковским были найдены два новых трёхмерных $\mathfrak{A}_5$-бирационально жёстких многообразия Фано; это дало два новых вложения группы икосаэдра $\mathfrak{A}_5$ в группу Кремоны ранга 3. Первое из них, так называемая квартика Бурхарда X, является трёхмерной квартикой с наибольшим возможным количеством изолированных особых точек. Количество её особенностей равно 45, и все они являются обыкновенными двойными. Известно, что квартика Бурхарда рациональна. Группа автоморфизмов X содержит две несопряженных подгруппы, изоморфные $\mathfrak{A}_5$. Мы доказали, что относительно одной из них квартика X бирационально жёстка. Основным шагом в доказательстве было вычисление $\mathfrak{A}_5$-инвариантной группы классов дивизоров Вейля на X, которое удалось провести, изучив комбинаторику плоскостей на квартике Бурхарда.

Вторым интересным многообразием с похожими свойствами оказалось двойное накрытие Y трёхмерного проективного пространства, разветвлённое в так называемой секстике Барта B; секстика B лежит в трёхпараметрическом семействе поверхностей степени 6, имеющих максимально возможное количество изолированных особых точек, и является единственной поверхностью в этом семействе, допускающей действие группы $\mathfrak{A}_5$. Количество особых точек поверхности B и многообразия Y равно 65, и все они являются обыкновенными двойными. Было доказано, что многообразие Y является $\mathfrak{A}_5$-бирационально жёстким. Как и в случае с квартикой Бурхарда, основным шагом доказательства было вычисление $\mathfrak{A}_5$-инвариантной группы классов дивизоров Вейля.

1.6. **Нормирования и тела Ньютона–Окунькова.** Тело Ньютона–Окунькова — объект, который кодирует свойства нормирования поля функций на алгебраическом многообразии. В частности, инфинитезимальные тела Ньютона–Окунькова соответствуют нормированиям, которые строятся некоторым специальным образом по флагам на поверхностях, причём в качестве дополнительных данных к флагу добавляется информация о бесконечно близких центрах нормирования. В совместной с Ч. Чилиберто, М. Фарником, А. Куроней, В. Лозовану и Ж. Ро работе 2016 года были проанализированы инфинитезимальные тела Ньютона–Окунькова при изменении дополнительного параметра на некотором начальном отрезке его возможных значений, и описаны возникающие в этом процессе мутации.

1.7. **Свойство Жордана для групп бирациональных автоморфизмов.** Совместно с Ю. Прохоровым была продолжена работа над изучением групп бирациональных автоморфизмов различных многообразий. В частности, были получены оценки на константу Жордана для группы Кремоны ранга 3, а также оценки для p-подгрупп в этой группе; судя по всему, обе оценки не точны (хотя и близки к точным). Были получены результаты о Жордановости некоторых многообразий, размерность слоев максимального рационально связного расслоения на которых равна двум. Наконец, практически закончена работа по классификации компактных комплексных поверхностей с Жордановыми группами (бирациональных) автоморфизмов.

2. Сравнение результатов с планами

2.1. **Успехи.** Наиболее успешной я считаю работу над вопросами эквивариантной бирациональной жёсткости для многообразий Фано. Было построено несколько несопряженных вложений группы вращений икосаэдра в группу Кремоны ранга 3, и на их примере обкатаны новые (и хорошо забытые старые) методы доказательства эквивариантной бирациональной жесткости.

2.2. **Частичные успехи.** Была получена оценка на константу Жордана группы Кремоны ранга 3, судя по всему не точная, и близкая к ней по смыслу оценка для p-подгрупп в этой группе.

Теорему о классификации расслоений на коники над абелевыми многообразиями с не-Жордановой группой бирациональных автоморфизмов доказать не удалось по той причине, что её неожиданно доказали Т. Бандман и Ю. Зархин, причём в таком виде, что улучшать уже было нечего. В качестве утешительного результата удалось обобщить их теорему на случай максимальных рационально связных расслоений относительной размерности 2.

Классификация (непроективных) компактных комплексных поверхностей начата, но не доведена до конца; осталось разобрать случай поверхностей Инуэ.

2.3. **Неудачи.** Не удалось существенно продвинуться в доказательстве гипотезы о Жордановости групп автоморфизмов аффинных многообразий. В данный момент надо признать, что задача оказалась значительно сложнее, чем казалось вначале.

2.4. **Незапланированные результаты.** Вопреки плану удалось доказать несколько интересных результатов о рациональности особых двойных накрытий проективного пространства, придумать две явные конструкции рациональности двух классических многообразий, и поработать над свойствами тел Ньютона–Окунькова.

3. Публикации

3.1. **Статьи и препринты.** При поддержке гранта были опубликованы следующие статьи:

- Ivan Cheltsov, Victor Przyjalkowski, Constantin Shramov, Quartic double solids with icosahedral symmetry, Eur. J. Math., 2:1 (2016), 96–119
- Ivan Cheltsov, Constantin Shramov, Two rational nodal quartic threefolds, Quarterly Journal of Mathematics, 67:4 (2016), 573–601

Были опубликованы препринты на архиве:

- Ivan Cheltsov, Victor Przyjalkowski, Constantin Shramov, Which quartic double solids are rational? arXiv:1508.07277
- C. Ciliberto, M. Farnik, A. Küronya, V. Lozovanu, J. Roé, C. Shramov, Newton–Okounkov bodies sprouting on the valuative tree, arXiv:1602.02074
- Ivan Cheltsov, Victor Przyjalkowski, Constantin Shramov, Burkhardt quartic, Barth sextic, and the icosahedron, arXiv:1606.04372
- Alexander Kuznetsov, Yuri Prokhorov, Constantin Shramov, Hilbert schemes of lines and conics and automorphism groups of Fano threefolds, arXiv:1605.02010

3.2. **Монография.** Была опубликована монография:

Ivan Cheltsov, Constantin Shramov, Cremona groups and the icosahedron, CRC Press, Boca Raton, FL, 2016, ISBN: 978-1-4822-5159-3 , xxi+504 pp

3.3. **Учебное пособие.** Совместно с С. Горчинским было закончено (и принято к печати издательством МЦНМО) учебное пособие по неразветвленной группе Брауэра и ее приложениям на основании записок семинара НОЦ МИАН 2011 года. В него (в основном в форме задач) вошел стандартный материал о когомологиях групп, группе Брауэра, препятствиям к стабильной рациональности, поверхностях Шатле, конструкции нерационального стабильно рационального многообразия, и препятствии Брауэра–Манина.

Сергей Горчинский, Константин Шрамов, Неразветвлённая группа Брауэра и её приложения, arXiv:1512.00874

4. Организация конференций и семинаров

Я являюсь (совместно с Д. Орловым, Ю. Прохоровым и В. Пржиялковским) соруководителем семинара Исковских, проходящего в МИАН. Также являюсь (совместно с Д. Орловым и Ю. Прохоровым) соруководителем учебного семинара по алгебраической геометрии в научно-образовательном центре МИАН. Принимал участие (совместно с Ф. Мангольтом, Д. Тестой и И. А. Чельцовым) в организации конференции “Frontiers of rationality” 13–18 июля 2014 года, Лонгйир (Шпицберген, Норвегия). Принимал участие (совместно с С. Галкиным и Н. Курносовым) в организации конференции “Projective Algebraic Geometry”, посвященной 65-летию Ф. Зака, 7–12 сентября 2015 года, Москва. Принимал участие (совместно с Дж. Парком, В. Пржиялковским, О. Стариковой и И. Чельцовым) в организации конференции “Magadan Algebraic Geometry International Conference” в Магадане, 7–11 декабря 2015 года. Принимал участие (совместно с Н. Курносовым и Ю. Прохоровым) в организации школ-конференций “Surfaces in positive characteristic”, 4–8 апреля 2016 года, Москва, и “Groups of birational automorphisms”, 14–18 ноября 2016 года, Москва.