

Краткое описание заявки А.А.Логунова (Summary). Некоторые открытые вопросы в теории гармонических функций.

Гармонические функции в размерности три и выше представляют собой гораздо менее изученный объект, чем гармонические функции в размерности два. В старших размерностях методы комплексного анализа уже не так эффективны как в размерности два, и нет нужных конформных отображений.

Научный проект направлен на решение вопроса об оценке градиента частного двух функций, гармонических в единичном шаре и имеющих общее множество нулей. Задача была поставлена и решена D.Mangoubi в размерности два, в связи с изучением свойств собственных функций оператора Лапласа на многообразиях. На плоскости локальная геометрия нулевого множества гармонической функции хорошо известна. В старших размерностях ситуация усложняется. Используя результаты алгебраической геометрии и аналитические методы, в совместной работе с Е.Малинниковой удалось доказать, что частное двух таких гармонических функций является вещественно аналитической функцией. В размерности три дополнительные рассуждения, основанные на структурной теореме Лоясевича, показывают, что частное и все его производные допускают оценки, зависящие только от нулевого множества. Результат может быть рассмотрен как обобщение классического неравенства Гарнака. Вопрос об оценках частного гармонических функций и его производных в размерности больше трех открыт. Проект предполагает решение этой проблемы с учетом полученного задела в размерности три.

В работе D.Mangoubi было доказано, что если u и v - гармонические функции в единичном диске комплексной плоскости, у которых одно и то же множество нулей Z , то их отношение u/v - функция класса C^1 , для которой выполнено неравенство $\sup_{D_{1/2}} |\nabla \log |u/v|| < C(Z)$, где константа C зависит только от Z . Проект также предполагает решение двумерной гипотезы Mangoubi, которая состоит в том, что $C(Z)$ зависит только от количества nodальных областей Z (количества компонент связности дополнения Z). Истинность гипотезы в старших размерностях подвергается сомнению.

Огромную роль в комплексном и гармоническом анализе играет тот факт, что для любой гармонической функции u двух переменных $\log |\nabla u|$ есть субгармоническая функция. Это утверждение становится неверным в старших размерностях, но некоторые его следствия остаются верными. В работе [2] А.Логунова был доказан многомерный гармонический аналог теоремы Левинсона о двойном логарифме. Теорема о двойном логарифме представляет собой критерий нормальности семейства голоморфных функций, не превосходящих по модулю некоторой фиксированной мажоранты, удовлетворяющей некоторому интегральному условию. Этот критерий нормальности был обобщен на гармонические функции в старших размерностях. Мы надеемся, что используемый метод в комбинации с теоремой об индексе удвоения помогут решить вопрос об оценке градиента частного гармонических функций с общим множеством нулей.

Библиография.

- [1] Alexander Logunov, Eugenia Malinnikova, On ratios of harmonic functions, arXiv:1402.2888.
- [2] A. Logunov, On the higher-dimensional harmonic analog of the Levinson loglog theorem, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I (2014), <http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2014.09.019>
- [3] D. Mangoubi, A gradient estimate for harmonic functions sharing the same zeros, Electron. Res. Announc. Math. Sci. 21 (2014), 62–71
- [4] Nikolai Nadirashvili, Harmonic functions with bounded number of nodal domains, Appl. Anal., 71 (1999), 187–196, doi:10.1080/00036819908840712.