

1. Бесконечное дерево Штейнера

Задача Штейнера заключается в том, чтобы для заданного множества A из метрического пространства X найти такое множество S , что $S \cup A$ связно и S обладает наименьшей возможной длиной.

Известно, что такое множество S будет являться деревом (и называться деревом Штейнера) и обладать не более, чем счетным числом точек ветвления (неконечных вершин). Задача, поставленная в моем дипломе (а впервые упомянутая в [1]), состояла в том, чтобы построить пример дерева со счетным числом точек ветвления.

Сделано:

- (a) Построен пример несводимого штейнеровского дерева, соединяющего несчетное множество точек и являющегося связным деревом со счетным числом точек ветвления.
- (b) Доказано, что это дерево является единственным штейнеровским деревом для своих вершин.

Еще не сделано:

- (a) Пока не удалось построить пример с вершинами ненулевой хаусдорфовой размерности
- (b) Не решена аналогичная задача для α -массы — см работу [2] (при такой постановке Штейнеровская задача является частным случаем при $\alpha = 0$).

2. Задача об оптимальном трубопроводе.

Строгая постановка задачи: рассмотрим класс замкнутых связных множеств $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию $\mathcal{H}^1(\Sigma) \leq l$ для заданного $l > 0$. Мы будем изучать свойства минимайзеров для максимального расстояния F_M от множества Σ до заданного компакта $M \subset \mathbb{R}^n$:

$$F_M(\Sigma) := \max_{y \in M} \text{dist}(y, \Sigma),$$

где $\text{dist}(y, \Sigma)$ означает расстояние между y и Σ .

Сделано

- (a) Определены некоторые свойства множества Σ в общем случае, в частности доказаны свойства дискретных и непрерывных множеств энергетических точек (см [3]).
- (b) Решены некоторые частные задачи (в том числе найдена оптимальная форма трубопровода для случая окружности с радиусом R , где $R \gg r$).

Еще не сделано:

- (a) Не разобран до конца случай окружности, не ясны ответы для некоторых других частных задач.
- (b) Не доведено до конца рассуждение о приближении континуального множества M конечными множествами M_k .

Список литературы

- [1] Paolini, E. Stepanov, E. (2012). “Existence and regularity results for the Steiner problem”. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations: Volume 46, Issue 3 (2013)*, Page 837-860.
- [2] A. Marchese, A. Massaccesi, Steiner tree problem revisited through rectifiable G-currents, 2012.
- [3] E. Paolini, E. Stepanov (2012) “Qualitative properties of maximum distance minimizers and average distance minimizers in R^n ”, *J. Math. Sciences (N.Y.)* : Volume 122, Number 3, Pages 105-122, Year 2004.