

Нилов Федор Константинович

Геометрия окружностей и коник на двумерных поверхностях

Краткое изложение заявки

Представленный проект содержит несколько задач по геометрии различных конфигураций из окружностей и коник на двумерных поверхностях, среди которых одна из основных – проблема Бляшке-Бола (1938) описания гексагональных 3-тканей из дуг окружностей на плоскости.

Гексагональной 3-тканью из дуг окружностей называются 3 семейства дуг окружностей в заданной области, диффеоморфных отрезкам прямых $x = const$, $y = const$, $x + y = const$. Задаче классификации гексагональных 3-тканей посвящены работы Х. Графа и Р. Зауера (1924), О. Фолка (1929), К. Штрубекера (1932), В. Вундерлиха (1938), А.М. Шелехова (2007), Х. Поттманна, М.Б. Скопенкова и Л. Ши (2012), Н. Луббеса (2013), В.Б. Лазаревой и А.М. Шелехова (2013) и др. В течение многих десятилетий не удавалось найти новых примеров (за исключением нескольких тканей из пучков окружностей, которые были обобщены А.М. Шелеховым в 2007 г). В недавней работе 2014 г. (Матем. сб., 205:11) мы построили несколько принципиально новых конструкций гексагональных 3-тканей на основе сочетания квадратичных и линейных семейств окружностей. Мы предполагаем описать гексагональные 3-ткани, образованные кубическими семействами окружностей (задающимися кривыми степени 3 в пространстве параметров всех окружностей).

С проблемой Бляшке-Бола тесно связана классическая проблема классификации поверхностей, через каждую точку которых проходит несколько (евклидовых) окружностей. В 2013 году в совместной работе с М.Б.Скопенковым (Geom. Dedicata: 163:1), мы доказали, что *если через каждую точку гладкой поверхности в \mathbb{R}^3 можно провести отрезок прямой и дугу окружности, пересекающиеся трансверсально, то эта поверхность является частью квадрики*. Мы планируем получить некоторые обобщения этого результата.

Вторая часть проекта посвящена следующей гипотезе Алона-Ласта-Пинхаси-Шарира (2001), которая утверждает, что *для любого конечного числа попарно пересекающихся окружностей на плоскости, не принадлежащих одному пучку, найдётся точка пересечения, через которую проходит не более трёх данных окружностей*. Мы предполагаем привести контрпример к этой гипотезе и доказать ее аналог для случая трансверсально пересекающихся окружностей.

Третья часть проекта посвящена различным приложениям обобщенных фокальных свойств окружностей, *дважды касающихся коник*. Мы планируем исследовать свойства семейства коник, дважды касающихся двух фиксированных окружностей; доказать аналоги классической теоремы Данделена о сферах, вписанных в круговой конус, на случай произвольной поверхности вращения второго порядка и тора; доказать обобщения теорем Штейнера и Эмха о замыкающихся цепочках окружностей.

В четвертой части проекта мы планируем доказать гипотезу Табачникова и Шварца (2007), которая представляет собой аналог теоремы Паскаля для вписанного 12-угольника.