Савин А.Ю. Краткое изложение заявки (Summary)

Пусть задано действие группы G на гладком замкнутом многообразии M. В этом случае на функциях на M определяется класс операторов, равных линейной комбинации дифференциальных операторов на M и операторов сдвига $u(x) \mapsto u(g^{-1}(x))$, $g \in G$ вдоль орбит действия группы. Такие операторы (будем их называть G-операторами) возникли при сведении краевых задач с нелокальными краевыми условиями на границу области (Т. Карлеман) и позднее стали играть важную роль в некоммутативной геометрии (А. Конн, А. Московичи, Д. Ланди, Д. Перрот и др.). Отметим, что G-операторы являются существенно *нелокальными*, поскольку они включают в себя операторы сдвига и, в частности, по этой причине исследование этих операторов представляет значительный интерес.

Проведенные исследования. Основные задачи, которые рассматриваются, состоят в исследовании условий фредгольмовости G-операторов и вычислении индекса в топологических терминах. Для решения этих задач был разработан (совм. с Б.Ю. Стерниным) *метод псевдодифференциальной униформизации.* Суть этого метода состоит в том, чтобы свести G-оператор к некоторому (псевдо)дифференциальному оператору. Если такое сведение построено, то индекс можно подсчитать, применяя к последнему оператору классическую формулу Атьи–Зингера. Этот метод успешно применялся на практике.

Во-первых, для широкого класса дискретных групп была получена униформизация с использованием KK-теории Каспарова, которая позволила дать явное выражение для униформизованного оператора. Отметим, что задача о получении явных формул индекса G-операторов в случае *бесконечных* групп долгое время была открытой, так как отсутствовал важнейший инвариант в формуле индекса — класс Тодда G-многообразия. Этот класс был недавно построен как элемент периодических циклических когомологий некоторой некоммутативной алгебры, отвечающей действию группы. Для группы $\mathbb{Z}$ была дана формула индекса.

Во-вторых, была проведена униформизация G-операторов в случае, когда G — компактная группа Ли. В качестве следствия была исследована фредгольмовость и вычислен индекс.

В-третьих, были униформизованы задачи Соболева с нелокальными граничными условиями, определяемыми G-операторами (задачи Соболева — некоторые задачи из теории дифференциальных уравнений, в которых “граничные” условия задаются на подмногообразиях произвольной размерности).

Проект будущих исследований. Планируется установить формулу индекса для G-операторов, ассоциированных с *неизометрическим* действием дискретных групп (по крайней мере, типа $\mathbb{Z}^n$, $n \geq 2$). Планируется также исследовать разрешимость G-операторов в зависимости от показателя гладкости $s \in \mathbb{R}$ пространств Соболева, в которых рассматривается оператор.

Планируется исследовать теорию индекса G-операторов на многообразиях с особенностями с действием дискретной группы G.

Предполагается начать исследование G-операторов, в которых вместо операторов сдвига стоят (более общие) операторы представления дискретной группы G в интегральных операторах Фурье, действующих в пространствах функций на гладком замкнутом многообразии. Предполагается определить символ таких операторов, установить теорему фредгольмовости и получить формулу индекса, по крайней мере, в случае конечных групп G.