Отчет за 2016 год
по гранту фонда «Династия» для молодых математиков
Федоровского Константина Юрьевича

1. Результаты, полученные в 2016 году

В 2016 году мной подготовлена и издана монография «Аппроксимация полианалитическими многочленами» [1], в которую вошли мои результаты последних лет по соответствующей тематике[1].

Кроме подготовки книги в 2016 году я занимался несколькими задачами, непосредственно связанными с тематикой аппроксимации функций решениями эллиптических дифференциальных уравнений.

1. Задачи о плотности модулей полианалитического типа в пространствах непрерывных и суммируемых функций на компактах в комплексной плоскости.

Пусть $\mathscr{R}$ — пространство, состоящее из всех рациональных функций комплексного переменного z, а $\mathscr{R}(E)$ — пространство всех функций из $\mathscr{R}$, полюсы которых лежат вне некоторого подмножества E комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Кроме того, пусть $C(X)$ — пространство, состоящее из всех непрерывных на компакте $X \subset \mathbb{C}$ комплекснозначных функций, с равномерной нормой.

Начиная с 1970-х годов изучается задача аппроксимации функций рациональными модулями, или, другими словами, задача описания тех компактов X, для которых пространство

$$\bigl\{R_0 + \overline{z}^{k_1} R_1 + \cdots + \overline{z}^{k_m} R_m : R_0, R_1, \ldots, R_m \in \mathscr{R}(X)\bigr\}, \tag{1}$$

где m и $k_1, \ldots, k_m$ — натуральные числа, $k_1 < k_2 < \cdots < k_m$, плотно в пространстве $C(X)$ (или в пространствах гладких функций на X). Класс функций (1) обладает структурой модуля над $\mathscr{R}(X)$. Так как этот модуль состоит из полианалитических функций (соответствующее определение приводится ниже), то его естественно называть рациональным модулем полианалитического типа. Аппроксимации функций рациональными модулями посвящены, в частности, работы А. Г. О'Фаррелла, Д. Вердеры, Д. Кармоны, Т. Трента и ряда других авторов. Начиная со второй половины 1980-х годов большой интерес вызывает также задача о плотности в пространстве $C(X)$ модулей вида

$$\bigl\{P_0 + \overline{z}^{k_1} P_1 + \cdots + \overline{z}^{k_m} P_m : P_0, P_1, \ldots, P_m \in \mathscr{P}\bigr\}, \tag{2}$$

где $\mathscr{P}$ — пространство всех многочленов комплексного переменного. Наиболее известным частным случаем этой задачи является задача о равномерной приближаемости функций полианалитическими многочленами, которая возникает в случае $k_j = j$ при $j = 1, \ldots, m$. Пространство (2) является модулем над $\mathscr{P}$, и его естественно называть полиномиальным модулем полианалитического типа. Достаточно подробный обзор по тематике равномерной аппроксимации функций рациональными и полиномиальными модулями полианалитического типа можно найти в моей совместной работе с М. Я. Мазаловым и П. В. Парамоновым (УМН, 2012). Результаты, полученные в прошлом году в задаче о равномерной приближаемости функций полианалитическими многочленами с ограничениями на допустимые степени сопряженного переменного (типа лакунарности) были описаны мной в отчете за прошлый год и вошли в статью [2] опубликованную в журнале *Journal of Approximation Theory* в этом году.

В 2016 году мной рассматривалась следующая задача, тесно связанная с указанной тематикой. Пусть $1 \le p \le \infty$. Через L^p, как обычно, обозначено пространство Лебега на единичной окружности $\mathbb{T}$, рассматриваемое относительно нормированной меры Лебега,

[1] Издание осуществлено за счет средств Российского научного фонда (проект 14-21-00025)

а через H^p — соответствующее пространство Харди. Пусть $m \geq 1$ — натуральное число. Для заданного набора $\{w_1, \dots, w_m\}$ функций класса L^∞ определим пространства

$$M^p(w_1, \dots, w_m) := H^p + w_1 H^p + \dots + w_m H^p.$$

В связи с изучением задач об аппроксимации функция полианалитическими многочленами (как общего вида, так и с ограничениями на допустимые степени сопряженного переменного) в пространствах суммируемых функций естественно возникает следующий вопрос: при каких условиях на функции $w_1, \dots, w_m$ пространство $M^p(w_1, \dots, w_m)$ при $p < \infty$ плотно в пространстве L^p, а пространство $M^\infty(w_1, \dots, w_m)$ $*$-слабо плотно в L^∞. Такая постановка вопроса была предложена А. Б. Александровым. Заметим, что пространства $M^p(w_1, \dots, w_m)$ обладают структурой модуля над H^∞.

В работе [3], опубликованной в *Математическом сборнике* получен ответ на поставленный вопрос: *Пространство $M^p(w_1, \dots, w_m)$ не плотно в L^p, а пространство $M^\infty(w_1, \dots, w_m)$ не $*$-слабо плотно в L^∞ тогда и только тогда, когда каждая из функций $w_1, \dots, w_m$ допускает псевдопродолжение неванлинновского типа в $\mathbb{D}$.*

Этот результат связан со структурой подпространств в L^p, инвариантных относительно умножения на z. Кроме того, в работе [3] получен явный вид пространства $M^2(w_1, \dots, w_m)^\perp$ и найдено его представление в терминах, связанных со специальными свойствами операторов Тёплица. В случае, когда $w_k = \overline{\varphi}^{n_k}$, $k = 1, \dots, m$, где φ — ограниченная однолистная в единичном круге функция, а n_k — натуральные числа, результаты о плотности в L^p пространств $M^p(\overline{\varphi}^{n_1}, \dots, \overline{\varphi}^{n_m})$ позволили получить новые условия приближаемости функций полианалитическими многочленами в пространствах суммируемых на границах односвязных областей в $\mathbb{C}$.

2. Задачи об аппроксимации функций решениями общих эллиптических однородных систем второго порядка в пространствах непрерывных и гладких функций на компактах в комплексной плоскости. Речь идет о системах вида

$$\left(A\frac{\partial^2}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где A, B и C — вещественные 2×2-матрицы, причем характеристическая форма $\det(A\xi^2 + B\xi\eta + C\eta^2)$ с вещественными ξ и η обращается в нуль только при $\xi = \eta = 0$.

Задача ставится следующим образом: описать компакты $X \subset \mathbb{C}$ такие, что всякая функция $f = u + iv$, непрерывная на X (или принадлежащая пространству гладких функций $C^m(X)$, здесь $m > 0$ вещественное число) и удовлетворяющая уравнению (3) на внутренности X может быть равномерно на X (или в норме соответствующего пространства $C^m(X)$ гладких функций) приближена последовательностью полиномиальных решений (3). Из эллиптичности системы (3) вытекает, что приведенное выше условие на функцию f — это естественное необходимое условие приближаемости. Таким образом, нас интересует описание компактов X, для которых естественное необходимое условие приближемости оказывается достаточным для *всех* приближаемых функций. Такие задачи в теории аппроксимации аналитическими функциями называют задачами для «классов функций». Кроме того, речь на данном этапе идет только о возможности аппроксимации (вопросы о скорости сходимости или о минимальности возникающих полных систем функций пока не рассматриваются; это планируется сделать в дальнейшем).

Ранее эти задачи рассматривались для систем (3), соответствующих однородным эллиптическим уравнениям второго порядка с постоянными комплексными коэффициентами, т.е. уравнениям вида $a\partial^2_{x,x}f + b\partial^2_{x,y}f + c\partial^2_{y,y} = 0$ где $a, b, c \in \mathbb{C}$. Используя терминологию Веркоты (G. Verchota) можно сказать, что это кососимметрические системы вида

(3). В моей совместной с Парамоновым работе (Матем. сб., 1999) был, в частности, получен критерий C^1-приближемости функций полиномиальными решениями таких уравнений, аналогичный известной теореме Мергеляна: необходимым и достаточным условием приближемости является связность множества $\mathbb{C} \setminus X$.

Аналогичный критерий приближаемости удалось получить в 2016 году для всех систем вида (3) в случае, когда аппроксимация рассматривается в C^1-метрике слабого типа. Соответствующая статья готовится к публикации. Этот результат получен совместно с моим аспирантом А. Багапшем (МГТУ им. Н. Э. Баумана).

3. Задача о существовании ограниченных однолистных функций в модельных пространствах, порожденных сингулярными внутренними функциями.

В связи с задачами равномерной и L^p-приближаемости функций полианалитическими многочленами возникло важное и интересное понятие неванлинновской области. Не приводя формального определения скажем, что неванлинновская область — это образ единичного круга при отображении ограниченной однолистной функцией, допускающей псевдопродолжение неванлинновского типа во внешность единичного круга.

Как было показано ранее, класс конформных отображений единичного круга на неванлинновские области совпадает с классом ограниченных однолистных в единичном круге функций φ таких, что $\varphi \in K_\Theta = H^2 \ominus \Theta H^2$ для некоторой (своей для каждой φ) внутренней функции Θ. Пространства K_Θ называются модельными пространствами. Эти пространства (и только они) инвариантны относительно оператора обратного сдвига в H^2. Задача о существовании ограниченных однолистных функций в пространствах K_Θ наиболее интересна и содержательна в случае, когда Θ — это сингулярная внутренняя функция. В 2016 году мной, совместно с А. Барановым и А. Боричевым, получен следующий результат: *Пусть μ — конечная положительная сингулярная мера на единичной окружности, а S — соответствующая сингулярная внутренняя функция. Если существует множество Карлесона $Y \subset \mathbb{T}$ такое, что $\mu(Y) > 0$, то для некоторого $m \in \mathbb{N}$ пространство K_{S^m} содержит ограниченные однолистные функции.* Этот результат позволяет рассчитывать на получение полного решения обсуждаемой задачи.

4. Еще одно направление моих исследований связано с множествами Каратеодори. Напомним, что ограниченная область $G \subset \mathbb{C}$ называется областью Каратеодори, если $\partial G = \partial G_\infty$, где G_∞ — это неограниченная связная компонента множества $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{G}$. Компакт $X \subset \mathbb{C}$ называется компактом Каратеодори, если $\partial X = \partial \widehat{X}$, где $\widehat{X}$ — это объединение X и всех ограниченных связных компонент множества $\mathbb{C} \setminus X$. Множества Каратеодори естественно возникают в различных областях теории приближений.

В 1988 году Д. Хавинсон ввел понятие аналитического выметания меры. Пусть X — компакт в комплексной плоскости, а μ — мера с носителем $S(\mu) \subset X^\circ$. Аналитическим выметанием меры μ на ∂X называется такая мера ν на ∂X, что $\mu - \nu \perp R(X)$ и $\|\nu\|$ минимальна среди всех мер на ∂X с указанным свойством. Д. Хавинсоном были получены формулы для аналитического выметания мер в случае компактов с кусочно-аналитическими границами. В 2016 году мной получена явная формула для аналитического выметания мер, носители которых являются подмножествами компактов Каратеодори. В самом простом случае этот результат формулируется так: *Пусть G — область Каратеодори, а μ — мера с носителем $S(\mu) \subset G$. Аналитическое выметание μ на ∂G имеет вид $(\widehat{\eta} \circ f^{-1})\,\omega$, где f — конформное отображение единичного круга $\mathbb{D}$ на G, $\eta = f^{-1}(\mu)$, $\widehat{\eta}$ — преобразование Коши меры η, а ω — гармоническая мера на ∂G.* При этом f^{-1} в приведенной формуле — это специальное продолжение функции f^{-1} из G на достижимую границу $\partial_a G$ области G (подробнее см. в моей совместной работе с Д. Кармоной (Oper. Theory Adv. Appl., vol. 158, 2005).

2. Опубликованные работы

[1] К. Ю. Федоровский, *Аппроксимация полианалитическими многочленами*, ИПМ им. М. В. Келдыша, Москва, 2016, ISBN: 978-5-98354-022-4, 197 с.

[2] A. D. Baranov, J. J. Carmona, K. Yu. Fedorovskiy, "Density of certain polynomial modules", *J. Approx. Theory*, **206** (2016), 1–16.

[3] К. Ю. Федоровский, "О плотности некоторых модулей полианалитического типа в пространствах суммируемых функций на границах односвязных областей", *Матем. сб.*, **207**:1 (2016), 151–166; K. Yu. Fedorovskiy, "On the density of certain modules of polyanalytic type in spaces of integrable functions on the boundaries of simply connected domains", *Sb. Math.*, **207**:1 (2016), 140–154.

[4] Е. В. Боровик, К. Ю. Федоровский, "О связи неванлинновских и квадратурных областей", *Матем. заметки*, **99**:3 (2016), 460–464; E. V. Borovik, K. Yu. Fedorovskiy, "On relations between concepts of Nevanlinna and quadrature domains", *Math. notes*, **99**:3 (2016), 460–464.

[5] P. V. Paramonov, K. Yu. Fedorovskiĭ, "Tverberg's proof of the Jordan close curve theorem", *St. Petersburg Math. J.*, **27**:5 (2016), 851-860, перевод статьи, вышедшей в журнале «Алгебра и Анализ» на русском языке в 2015.

3. Участие в конференциях, доклады на семинарах

Выступал с докладами на следующих конференциях:

1) Конференция «Geometric Analysis in Control and Vision Theory», 9-14 мая 2016, Берген/Восс, Норвегия, `http://folk.uib.no/ava004/Voss2016/`. Приглашенный доклад (50 минут) «L^1-estimates of derivatives of univalent rational functions and related topics».
2) 2) Конференция «25th St.Petersburg Summer Meeting in Mathematical Analysis: Tribute to Victor Havin, 1933-2015», 25-30 июня 2016, Санкт-Петербург, Россия, `http://gauss40.pdmi.ras.ru/ma25/`. Доклад (20 минут) «One problem of C^1-approximation of functions by solutions of elliptic PDE».
3) 3) Конференция «Operators on spaces of holomorphic functions», 16-19 ноября, Тулуза, Франция, `http://www.cimi.univ-toulouse.fr/analysis/en/week5/`. Приглашенный доклад (1 час) «Univalent functions in model subspaces».

Выступал с докладами на следующих научных семинарах:

4) «Density of polynomial modules of polyanalytic type in spaces of continuous and integrable functions», November 10, 2016, *Séminaire d'Analyse Fonctionnelle*, Université Paris VI, France.
5) «О квадратурных областях», 31 октября 2016, *Семинар по комплексному анализу (Семинар Гончара)*, МИАН, Москва, Россия.
6) «Quadrature domains and Nevanlinna domains: the similarities and the differences», July 11, 2016, *Seminari d'Anàlisi*, Universitat Autònoma de Barcelona and Universitat de Barcelona, Spain.
7) «Nevanlinna domains, their generalizations and related problems in model spaces», June 6, 2016, *Séminaire d'Analyse et Géométrie*, Aix–Marseille Université, France.
8) «Задачи аппроксимации для полианалитических функций», 21 апреля 2016, *Семинар «Глобус»*, Независимый Московский Университет, Москва, Россия.
9) «О теореме Мергеляна для функций, не обращающихся в нуль», 30 марта 2016, *Семинар по многомерному комплексному анализу (Семинар Витушкина)*, МГУ, Москва, Россия.

Принимал участие (как член организационного комитетов) в организации конференции «Workshop and Autumn School «Spaces of Analytic Functions and

Singular Integrals (SAFSI2016)», 17-20 октября 2016, Санкт-Петербург, Россия, http://www.chebyshev.spbu.ru/sasfi2016/.

4. Педагогическая деятельность

Прочитаны курсы «Теория функций комплексного переменного» и «Линейная алгебра» (весна 2016 года) в МГТУ им. Н. Э. Баумана и курс «Полиномиальная и рациональная аппроксимация в комплексной области» (осень 2016 года) в Санкт-Петербургском государственном университете.

Руковожу 2 аспирантами (1 в МГТУ им. Н. Э. Баумана и 1 в СПбГУ).

5. Дополнительная информация

Являюсь руководителем семинара (совместно с П. В. Парамоновым, МГУ им. М. В. Ломоносова) «Теория приближений аналитическими функциями» кафедры Теории функций и функционального анализа МГУ.

Являюсь руководителем семинара «Анализ и дифференциальные уравнения» кафедры Прикладной математики МГТУ им. Н. Э. Баумана.

В 2016 году 3 раза выступал в качестве официального оппонента на защитах диссертаций на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук:

1) Диссертация О. А. Маниты «Нелинейные уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова для мер» (МГУ, 11.03.2016).
2) Диссертация И. Я. Цилина «Функционально-аналитические подходы к вопросу о регулярности решений вариационных и краевых задач» (МИАН, 26.05.2016).
3) Диссертация Ю. В. Тихонова «Классы сингулярных функций в различных функциональных пространствах» (МГУ, 02.12.2016).