Report on the Dynasty–IUM fellowship 2015

SERGEY GALKIN

New results

[1] Конструкция поверхности Энриквеса степени 16 как линейное сечение соединения двух поверхностей Веронезе.

Ранее я построил несколько гладких трёхмерных многообразий Калаби–Яу, как линейные сечения соединений пар трёхмерных многообразий дель Пеццо, и изучил их свойства. Один из тонких моментов заключался в том, что не про все примеры было понятно, односвязны ли они — как правило односвязность получается вывести применением теоремы Барта–Лефшеца, но один пример настойчиво уклонялся от области применимости любой теоремы такого типа. В этом примере трёхмерное многообразие Калаби–Яу с $b_2 = 1$ имеет аномально большую степень 64, и получается как линейное сечение соединения двух трёхмерных многообразий Веронезе в $\mathbb{P}^9$. Оказалось, что это многообразие Калаби–Яу имеет неразветвлённое двулистное накрытие, являющееся специальным гладким полным пересечением квадрик, и всё это потому, что соединение двух многообразий Веронезе является фактором проективного пространства по инволюции.

Поэтому я посмотрел на пример в предыдущей размерности, то есть на линейное сечение соединения двух поверхностей Веронезе. Аналогичные рассуждения показывают, что это поверхность Энриквеса в её проективной модели, заданной поляризацией степени 16. Преимущество такого описания, по сравнению с описанием просто как фактора от пересечения трёх квадрик по свободной инволюции, в том, что поверхность Веронезе имеет интересное проективно-двойственное многообразие, а именно четёрехмерную детерминантальную кубику, заданную уравнением $\det M = 0$.

Таким образом, по одним и тем же линейно-алгебраическим данным можно построить два геометрических объекта: поверхность Энриквеса, полученную как линейное сечение соединения двух поверхностей Веронезе пространством $\mathbb{P}(W)$ коразмерности три, и рациональную эллиптическую поверхность, соответствующую пучку кубик $\alpha \det M_1 + \beta \det M_2 = 0$ на проективной плоскости $\mathbb{P}(W^{\perp})$. Более того, у рациональной эллиптической поверхности два слоя (над точками $(1 : 0)$ и $(0 : 1)$) выделенные. Естественно предположить, что поверхность Энриквеса получается из рациональной логарифмическим преобразованием в выделенных слоях. Это сейчас показывают Евгений Маршаков и Евгений Ефименко.

[2] Гиперкелеровы многообразия и модулярные формы

This June we did some experiments with Duco van Straten that suggest the following. One-dimensional moduli spaces of lattice-polarised hyperkähler manifolds tend to be the usual modular curves with respect to some congruence subgroups in $SL(2, \mathbb{R})$, and the periods of the respective Picard–Fuchs equations are the usual modular forms. First of all, this suggests that the respective hyperkähler manifolds with large Picard number are isogeneous to powers of elliptic curves, similarly to the theory of Inose–Shioda and Morrison. Also mirror symmetry together with explicit computations of the respective differential equations and periods might help with providing new constructions of hyperkähler manifolds polarised by a single ample divisor.

Interestingly, this theory also works for abelian varieties. Periods of the mirror-dual family cannot literally coincide with any rational curve counting, since there is obviously physically no rational curves. Instead it is believed that they can be seen on the symplectic side as some open Gromov–Witten invariants, counting holomorphic disc (maybe in some tropical limit). In the particular case of the Jacobians of hyper-elliptic curves, one can do explicit computations of "rational curves" using the abelian/non-abelian correspondence of Bertram–Ciocan-Fontanine–Kim–Sabbah and obtain some particular differential equations and modular forms (some powers of theta-functon). This is the subject of Artem Kalmykoff's diploma.

Similarly, explicit computations for Beauville–Donagi's fourfold and the model of Enriques surface above produce some explicit modular forms. Now we are trying to identify what kind of modular forms (or, more generally, differential equations with vanishing Yukawa couplings) are possible to obtain by this construction, later we plan to invert it to obtain new descriptions of polarised manifolds.

Papers

[1] With L. Katzarkov, A. Mellit, E. Shinder
Derived categories of Keum's fake projective planes
Advances in Mathematics 278 (2015) 238–253.

In this paper we conjecture that derived categories of coherent sheaves on fake projective n-spaces have a semi-orthogonal decomposition into a collection of $n+1$ exceptional objects and a category with vanishing Hochschild homology. We prove this for fake projective planes with non-abelian automorphism group (such as Keum's surface). Then by passing to equivariant categories we construct new examples of phantom categories with both Hochschild homology and Grothendieck group vanishing.

[2] With A. Mellit and M. Smirnov
Dubrovin's conjecture for $IG(2,6)$
International Mathematics Research Notices 2015 (18): 8847–8859.

We show that the big quantum cohomology of the symplectic isotropic Grassmanian $IG(2,6)$ is generically semisimple, whereas its small quantum cohomology is known to be non-semisimple. This gives yet another case where Dubrovin's conjecture holds and stresses the need to consider the big quantum cohomology in its formulation.

[3] With V. Golyshev and H. Iritani
Gamma classes and quantum cohomology of Fano manifolds: Gamma conjectures
arXiv:1404.6407 and IPMU 10-0200, *to appear in Duke Mathematical Journal.*

We propose Gamma Conjectures for Fano manifolds which can be thought of as a square root of the index theorem. Studying the exponential asymptotics of solutions to the quantum differential equation, we associate a principal asymptotic class A_F to a Fano manifold F. We say that F satisfies Gamma Conjecture I if A_F equals the Gamma class $\hat{\Gamma}_F$. When the quantum cohomology of F is semisimple, we say that F satisfies Gamma Conjecture II if the columns of the central connection matrix of the quantum cohomology are formed by $\hat{\Gamma}_F Ch(E_i)$ for an exceptional collection E_i in the derived category of coherent sheaves $D^b_{coh}(F)$. Gamma Conjecture II refines part (3) of Dubrovin's conjecture. We prove Gamma Conjectures for projective spaces and Grassmannians.

[4] With T. Coates, A. Corti, A. Kasprzyk
Quantum periods for 3-dimensional Fano manifolds
arXiv:1303.3288 and IPMU 13-0113, *to appear in Geometry and Topology.*

The quantum period of a variety X is a generating function for certain Gromov–Witten invariants of X which plays an important role in mirror symmetry. In this paper we compute the quantum periods of all 3-dimensional Fano manifolds. In particular we show that 3-dimensional Fano manifolds with very ample anticanonical bundle have mirrors given by a collection of Laurent polynomials called Minkowski polynomials. This was conjectured in joint work with Golyshev. It suggests a new approach to the classification of Fano manifolds: by proving an appropriate mirror theorem and then classifying Fano mirrors. Our methods are likely to be of independent interest. We rework the Mori–Mukai classification of 3-dimensional Fano manifolds, showing that each of them can be expressed as the zero locus of a section of a homogeneous vector bundle over a GIT quotient V/G, where G is a product of groups of the form $GL_n(\mathbb{C})$ and V is a representation of G. When $G = GL_1(\mathbb{C})^r$, this expresses the Fano 3-fold as a toric complete intersection; in the remaining cases, it expresses the Fano 3-fold as a tautological subvariety of a Grassmannian, partial flag manifold, or projective bundle thereon. We then compute the quantum periods using the Quantum Lefschetz Hyperplane Theorem of Coates–Givental and the Abelian/non-Abelian correspondence of Bertram–Ciocan-Fontanine–Kim–Sabbah.

[5] Degenerations, transitions and quantum cohomology
to appear in Tropical Aspects in Geometry, Topology and Physics, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Report No. 23/2015, DOI: 10.4171/OWR/2015/23

Given a singular variety I discuss the relations between quantum cohomology of its resolution and smoothing. In particular, I explain how toric degenerations helps with computing Gromov-Witten invariants, and the role of this story in "Fanosearch" program.

[6] With T. Coates, A. Kasprzyk, A. Strangeway

Quantum Periods For Certain Four-Dimensional Fano Manifolds
arXiv:1406.4891, *submitted to Documenta Mathematica*

We collect a list of known four-dimensional Fano manifolds and compute their quantum periods. This list includes all four-dimensional Fano manifolds of index greater than one, all four-dimensional toric Fano manifolds, all four-dimensional products of lower-dimensional Fano manifolds, and certain complete intersections in projective bundles.

[7] With H. Iritani
Gamma conjecture via mirror symmetry
arXiv:1508.00719, *submitted to the proceedings of the conference "Primitive Forms and Related Subjects" at IPMU (Feb 2014), to be published in a volume of Advanced Studies in Pure Mathematics*

[8] With E. Shinder
On a zeta-function of a dg-category
arXiv:1506.05831

We define a zeta-function of a pre-triangulated dg-category and investigate its relationship with the motivic zeta-function in the geometric case.

[9] With I. Karzhemanov and E. Shinder
Acyclicity of non-linearizable line bundles on fake projective planes
IPMU 15-0202

On the projective plane there is a unique cubic root of the canonical bundle and this root is acyclic. On fake projective planes such root exists and is unique if there are no 3-torsion divisors (and usually exists but not unique otherwise). Earlier we conjectured that any such cubic root (assuming it exists) must be acyclic. In the present note we give a new short proof of this statement and show acyclicity of some other line bundles on those fake projective planes with at least 9 automorphisms. Similarly to our earlier work we employ simple representation theory for non-abelian finite groups. The novelty stems from the idea that if some line bundle is non-linearizable with respect to a finite abelian group, then it should be linearized by a finite (non-abelian) Heisenberg group. Our argument also exploits J. Rogawski's vanishing theorem and the linearization of an auxiliary line bundle.

Scientific conferences and seminar talks

[1] Conference NoGAGS, Berlin, December 21–22,
Talk "Hyperkähler manifolds and modular forms"
[2] Conference Magadan Algebraic Geometry International Conference, Magadan, December 6–12,
Talk "Counting rational curves on abelian varieties"
[3] Conference Categorical and analytic invariants in Algebraic geometry II, Kashiwa, November 16 – 20,
Talk "Counting rational curves on abelian varieties"
[4] Conference Categorical and analytic invariants in Algebraic geometry 1, Moscow, September 14 – 18
Talk "Joins and Hadamard products"
[5] Conference Second SwissMAP Geometry and Topology Conference, Les Diablerets, June 23–26
Talk "Calculus of algebraic dynamics"
[6] Conference Amplitudes, Motives and beyond, Mainz, June 01–12
Talk "Exceptional minuscule graphs and motives"
[7] Conference Twenty-second Gökova Geometry/Topology Conference, Gökova, May 25–30
Talk "Homotopy quantization"
[8] Conference Topics in Geometry, Istanbul, May 18–22
Talk "Branched covers and columns of Golyshev–Mendeleev's table"
Talk "Joins and Hadamard products"
[9] Conference Tropical Aspects in Geometry, Topology and Physics, MF, Oberwolfach, April 26–May 02
Talk "Degenerations, transitions and quantum cohomology"
[10] Conference New techniques in birational geometry, Stony Brook, March 07–11
Talk "A tentative integer-valued birational invariant of threefolds"
[11] First SwissMAP Geometry and Topology conference, Engelberg, January 18–23

Talk “Refined counting of holomorphic discs bounded on Lagrangian torus on a surface”

[12] Conference Algebraic geometry and complex analysis for young Russian mathematicians , Koryazhma, Russia, August 17 – 22

Talk “Class of a cubic in the Grothendieck–Levine ring”

[13] Conference ”Baikal readings”, Irkutsk, March 16–27

Talk “On the origin of groups”

[14] Talk Quantum indices of real curves and non-commutative Ginzburg-Landau potentia at “Riemannian surfaces, Lie algebras and mathematical physics seminar, Moscow, December 18 (Independent University of Moscow)

[15] Talk Markov triples and exotic tori on a plane at “Homotopy seminar”, Moscow, December 14 (HSE)

[16] Talk Homotopy quantization at “Homotopy seminar”, Moscow, December 7 (HSE)

[17] Talk Quantum, refined, tropical, real, and homotopic at ”Algebraic Geometry seminar”, Moscow, December 4 (Laboratory of Algebraic Geometry at HSE)

[18] Talk Mirror Moonshine at Automorphic Forms and their applications, Moscow, December 1 (HSE)

[19] Talk Measurements of varieties at University of Chicago Algebraic Geometry Seminar, Chicago, October 20 (University of Chicago)

[20] Talk What is moonshine? at Séminaire “Fables Géometriques”, villa Batelle, Carouge, September 28 (Université de Genève)

[21] Talk Geometric moonshines at Automorphic Forms and their applications, Moscow, September 15 (HSE)

[22] Talk Gamma function in symplectic topology at Geometric structures on manifolds, Moscow, September 3 (HSE)

[23] Talk A zeta-function of a dg-category, Trieste, July 13 (ICTP)

[24] Talk The conifold point, conjecture $\mathcal{O}$, and related problems at ”Summer Tropical Seminar”, Bonn, June 9

[25] Talk Artin-Mumford, Ingalls-Kuznetsov and Hosono-Takagi at “Algebraic geometry seminar”, Vienna, May 8 (University of Vienna)

[26] Talk “Branched covers and the explanation for miraculous "Golyshev–Mendeleev’s table"” at Séminaire de Géométrie Tropicale, Paris, April 6 (Université Pierre et Marie Curie)

[27] Talk “On zeta-function of a category” at ”Geometric structures on manifolds”, Moscow, March 15 (Laboratory of Algebraic Geometry at HSE)

[28] Talk “An explicit construction of Miura’s varieties” at ”Algebraic Geometry seminar”, Moscow, February 13 (Laboratory of Algebraic Geometry at HSE)

[29] Talk “An explicit construction of Miura’s varieties” at Algebraic Geometry seminar, Stony Brook, February 4 (Stony Brook University)

Teaching

[1] Proofs of Irrationality. Independent University of Moscow, students from 3 year, September-December 2015, 1.5 hours per week.

Program:

(1) Rationality, stable rationality, retract-rationality, unirationality, rational connectedness.
(2) Examples of rational varieties. Rationality of intersection of two quadrics.
(3) Birational invariants. Resolution of singularities and weak decomposition theorem. Holomorphic contravariant tensors.
(4) Castelnuovo’s rationality criterium.
(5) Rationality of surfaces over non-algebraically-closed fields. Del Pezzo fibrations.
(6) Conic bundles, discriminant. Double covers and Prym varieties. Intermediate Jacobian of a conic bundle.
(7) Artin–Mumford’s example of stably irrational unirational threefold. Torsion in homology. Brauer group.
(8) Clemens–Griffiths’s proof of irrationality of a smooth cubic threefold. Variety of lines on a cubic hypersurface. Weil’s intermediate Jacobian and Griffiths’s component.
(9) Iskovskikh–Manin’s proof of irrationality of a smooth quartic threefold. Method of maximal singularities. Birational rigidity.
(10) Kollár’s method: holomorphic forms in finite characteristic.
(11) Voisin’s degeneration method. Stable irrationality of a very general double cover of $\mathbb{P}^3$ branched in a quartic.
(12) Beauville’s proofs using Voisin’s degeneration method.
(13) Work of Colliot-Thélène and Pirutka. Stable irrationality of a very general quartic threefold.
(14) Stable irrationality of a very general quartic fourfold after Totaro.

[2] Algebraic Surfaces, National Research University Higher School of Economics (in IUM), students from 3 year, September 2015 - June 2016, 1.5 hours per week.

Program:

(1) Basics of minimal model programme will be introduced as soon as they will be required. Canonical bundle, adjunction formula. Divisors and curves, Picard and Neron–Severi groups, Kähler and Mori cones. Criteria of ampleness. Hodge structure of surfaces, Hodge index theorem. Vanishing theorems, Serre duality. Kodaira dimension. Finite generation of canonical and Cox rings. Blowups and exceptional curves. Castelnuovo contraction theorem. Cone theorem, extremal rays, contraction theorem. Minimal models. Canonical models and canonical singularities.

(2) Uniruled surfaces. Rational surfaces. Castelnuovo's rationality criterium. Hesse pencil and other interesting pencils. Del Pezzo surfaces, lines on them, exceptional root systems. Rational Jacobian elliptic surfaces. Du Val singularities. Rational elliptic surfaces without a section. Halphen pencils. Conic bundles, ruled surfaces, Tsen theorem, projectivization of vector bundles. Hirzebruch surfaces. Scrolls. Coble surfaces. Severi–Brauer varieties.

(3) Kodaira dimension zero. Abelian surfaces. Bielliptic surfaces. Kummer surfaces. $K3$ surfaces. Torelli theorem. Enriques surfaces. Reye and Cayley models. Connection with Coble surfaces.

(4) Kodaira dimension one, elliptic surfaces. Neron–Kodaira–Tate classification of minimal models of elliptic curves over a local field. Mordell–Weil group, Shioda–Tate formula. Theory of Jacobian elliptic surfaces. Ogg–Shafarevich theory, principal homogeneous spaces over elliptic curves.

(5) Surfaces of general type. Surfaces with $p_g = q = 0$. Example: Godeaux surface. Campedelli surfaces. Barlow surface. Determinantal quintics and Catanese surfaces. Beauville surfaces. Bidisc quotients. Bogomolov–Miyaoka–Yau inequality. Ball quotients. Mostow rigidity. Fake projective planes. Rigid configurations of lines on a plane, and other rigid configurations. Fiberations by higher genus curves, Shafarevich and Mordell conjectures. A proof of Shafarevich conjecture. Parshin's trick and a proof of Mordell conjecture.

[3] Seminar "Diversity of manifolds", National Research University Higher School of Economics (in IUM), students from 3 year, September 2015 - June 2016, 1.5 hours per week.

[4] With V. Gritsenko

Seminar "Automorphic forms and their applications", National Research University Higher School of Economics (joint with Poncelet lab), students from 3 year, September 2015 - June 2016, 2 hours per week.

[5] With M. Verbitsky and V. Zhgoon

Seminar "Geometric structures on complex manifolds", National Research University Higher School of Economics (in IUM), students from 3 year, September 2015 - June 2016, 3 hours per week.

Научное руководство.

[1] Артём Приходько, дипломник в НМУ и аспирант 1 года в НМУ и на матфаке ВШЭ.

In his diploma project Artem studies the group of algebraic 2-cycles on a smooth 4-dimensional cubic hypersurface with large group of automorphisms. For one of the cases of interest (namely, for the unique smooth cubic fourfold with an automorphism of order 11), he calculated the group of Tate cycles (using point counting) and has shown that it is 21-dimensional. Then he proved that the group of Hodge 2-cycles of that cubic is 21-dimensional as well. Since Hodge conjecture in this case is proven, the algebraic 2-cycles are 21-dimensional. Now Artem studies the lattice of 2-cycles of this cubic in connection with the questions of its rationality, in particular now he is checking whether it satisfies the conditions of Hassett, Kuznetsov and Galkin–Shinder. Artem is a skilled programmer, and in his work he effectively combines the computer experiments with application of deep theories that he learnt and many original clever ideas. Apart from his diploma project Artem is doing some research on his own, often consulting me with various interesting questions and constructions.

Также Артём занимается следующей задачей: если $f(x) : X \to \mathbb{A}^1$ и $g(y) : Y \to \mathbb{A}^1$ — пара проективных морфизмов, как компактифицировать их сумму Себастьяни–Тома $f(x) + g(y) : X \times Y \to \mathbb{A}^1$?

[2] Павел Попов, аспирант 1 года в НМУ и на матфаке ВШЭ.

Паша изучает как могут быть устроены многообразия инстантонов, стабильных векторных расслоений и стабильных пучков без кручения на многообразиях, неразветвленно накрываемых комплексным шаром. Мы надеемся, что рассмотрение этих многообразий позволит дать концептуальное доказательство теоремы пропорциональности Хирцебруха, также прояснит что-то про зануление (или существование) автоморфных форм критических весов для групп $SU(n, 1)$, и может быть поможет доказать существование исключительных наборов и фантомов на ложных проективных пространствах (так называемая гипотеза Галкина–Кацаркова–Меллита–Шиндера).

[3] Дмитрий Швецов, дипломник магистратуры ВШЭ.

Основные области интересов Димы лежат в элементарной геометрии, тропической геометрии, и алгебраической теории чисел, которую он сейчас очень хочет освоить.

В курсовой работе "Арифметически эквивалентные поля, и сравнение дзета-функций многообразий над ними", написанной весной 2015 года, Дима изучал вопрос "можно ли услышать форму числового поля после замены базы?". Два числовых поля называются арифметически эквивалентными, если их дзета-функции Дедекинда равны. Известно, что такие пары неизоморфных полей K и K' существуют, и обладают таким свойством: их нормализации совпадают (обозначим это поле через L), а тройка групп Галуа $Gal(L/\mathbb{Q})$, $Gal(L/K)$, $Gal(L/K')$ является так называемой тройкой Гассмана, то есть представления, полученные как индуцированные с двух меньших подгрупп на общую большую изоморфны. Такая же конструкция троек Гассмана обслуживает и конструкцию Сунады, позволяющую дать отрицательный ответ на вопрос "можно ли услышать форму барабана?", то есть существуют ли пары неизометричных римановых многообразий с совпадающими спектрами оператора Лапласа. Дима разобрался с тем, что можно сказать про пару арифметически эквивалентных полей, и изучал вопрос о том, при каких заменах базы эквивалентность сохраняется, а при каких нет. Другими словами, если задано многообразие X над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$, что можно сказать про дзета-функции X над K и над K'?

Дипломная работа Димы связаны с дипломной работой Артёма Приходько. (Доказанная) гипотеза Серра утверждает, что все двумерные представления Галуа модулярны, то есть обратное преобразование Меллина от их L-функции является Гекке-собственной модулярной формой. В частности, это означает что для любого многообразия $X/\mathbb{Q}$, у которого "много" алгебраических n-циклов представление Галуа $H^{2n}(X)$ является модулярным с точностью до L-функций мотивов Артина–Тейта. Таким образом, если задано какое-то алгебраическое многообразие X, определённое над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$, если для какого-то n разность второго числа Бетти $b_n(X)$ и ранга числа алгебраических циклов равна двум, тогда обратное преобразование Меллина от L-функции $L_n(X)$ является модулярной формой веса $n+1$, с точностью до L-функций Артина. Четырёхмерная кубика Ферма, изучавшаяся многими, а также (после результатов А. Приходько) четырёхмерная кубика с автоморфизмом порядка 11, как раз обладают требуемым свойством "малости". Встаёт вопрос: найти модулярные формы, соответствующие четырёхмерным кубикам с 21-мерной группой тейтовых циклов. Например, для кубики, исследованной Артёмом Приходько, должна получиться единственная CM-форма уровня 3 и веса 27. Установлением этого вопроса Дима в настояший момент и занят.

[4] Андрей Давыдов, дипломник бакалавриата матфака ВШЭ.

Тема диплома: "Производная категория многообразия прямых на кубической гиперповерхности" ("Derived category of the variety of lines on a cubic hypersurface").

Моя работа arXiv:1405.5154 (совместно с Е. Шиндером) началась с попытки доказать (неопубликованную) гипотезу: ограниченная производная категория когерентных пучков у многообразия прямых на гладкой четырёхмерной кубической гиперповерхности эквивалентна симметрическому квадрату (в смысле Гантер и Капранова) от категории Кузнецова (допустимой подкатегории в ограниченной производной категории когерентных пучков на самой кубике, ортогональной к исключительному набору из трёх линейных расслоений). Эта гипотеза до сих пор открыта, но мы смогли доказать, что соответствующее равенство имеет место в кольце Гротендика от категорий. Для этого нужно скомбинировать формулу, доказанная в этой работе, с формулой, связывающей обычные и категорные симметрические квадраты (она сформулирована в первой версии препринта arXiv:1506.05831, и мы добавим её несложное доказательство в обновлённую версию).

Андрей пытается доказать исходную гипотезу про эквивалентность категорий, выделив геометрическое содержание из двух наших формул, и скомбинировав это.

[5] Евгений Ефименко, студент 4 курса матфака ВШЭ.

Тема диплома: "Логарифмические преобразования и проективная двойственность" ("Logarithmic transformations and projective duality"). Это попытка понять связь, описанную в начале отчёта.

[6] Артем Калмыков, дипломник бакалавриата матфака ВШЭ.

Артём занимается симплектический и тропической геометриями, зеркальной симметрией (в стиле SYZ и более доступными для вычислений тропическими аналогами), интересуется бирациональной геометрией.

Весной 2015 года Артём написал курсовую работу про зеркальную симметрию для аффинных поверхностей Калаби-Яу с максимальной границей. Оказывается, что для этого класса многообразий, Гросс–Хакинг–Кил–Концевич предложили конкретную алгебро-геометрическую конструкцию (впрочем, использующую элементы исчислительной геометрии) для построения зеркального двойственного партнера. Идея восходит к SYZ-конструкции зеркальной симметрии (скомбинированной с несколькими идеями гомологической зеркальной симметрии), рассмотренной в тропическом пределе. Стартуя с поверхности такого типа, строится бесконечномерное пространство с явным базисом, пронумерованным специальными нормированиями поля функций исходной поверхности, на котором вводится структура фробениусовой алгебры, использующая некоторые специальные инварианты Громова–Виттена как структурные константы. Спектр этой алгебры это зеркально двойственная поверхность. В своей работе Артём разобрал как эта конструкция работает на примере аффинной поверхности дель Пеццо степени 5, то есть дополнения проективной поверхности дель Пеццо степени 5 до пятиугольника (-1)-кривых.

Сейчас Артём пишет дипломную работу про зеркальную симметрию для якобианов гиперэллиптических кривых.

[7] Александра Мазурова, дипломница бакалавриата матфака ВШЭ.

Тема диплома: “Исключительные наборы на исключительных микровесовых многообразиях” (“Exceptional collections on exceptional minuscule varieties”).

Кузнецов и Полищук показали, что на всех однородных многообразиях вида G/P, где G это полупростая алгебраическая группа классического типа (SL, SO, Sp), а P это параболическая подгруппа. Аналогичный результат ожидается и на всех исключительных однородных многообразиях, в том числе и на микровесовых. Существует всего два исключительных микровесовых многообразия: для группы E_6 это так называемая плоскость Кели (или октонионная проективная плоскость), а для E_7 это 27-мерное многообразие Фрейденталя. Исключительные наборы на плоскости Кели были построены Манивелем и Манивелем–Фаенци arXiv:1201.6327, во втором случае исключительный набор лефшецев, и авторам удалось доказать его полноту. Единственное исключительное микровесовое многообразие, исключительного набора на котором пока ещё не построено, это многообразие Фрейденталя — самое последнее и самое интересное из исключительных микровесовых многообразий. Саша пытается построить на нём лефшецев исключительный набор.

Микровесовые многообразия, в каком-то смысле, самые простые из всех однородных многообразий, и большая часть их геометрии кодируется графами Хассе и Брюа. Есть ожидание, что существует индуктивная конструкция исключительного набора, каждый шаг которой повышает ранг группы на один, и набор на многообразии Фрейденталя получится за четыре шага, начиная с геометрии $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$.

[8] Евгений Маршаков, дипломник бакалавриата матфака ВШЭ.

Женя занимается алгебраической и бирациональной геометрией, а также активно развивающейся областью кластерной геометрии (геометрический подход к появившимся 10 лет назад кластерным алгебрам).

Весной 2015 года Женя написал курсовую работу про разные аспекты поверхности дель Пеццо степени пять, классические и новые: рациональность над произвольным полем, кривые на этой поверхности, связь с кластерными алгебрами, структура кластерного многообразия.

Сейчас Женя пишет дипломную работу про поверхности Энриквеса степени 16 и пучки плоских кривых, подробнее про эту задачу написано в начале отчёта.