

Отчет о научной и педагогической деятельности по гранту фонда «Династия» за 2016 год

Казачков Алексей Олегович

1. Научные результаты

Далее будут описаны результаты исследования по каждому из трех пунктов заявки, полученные в 2016 г.

Диссипативная хаотическая динамика

(КРАТКО) В неголономной модели, описывающей качение волчка Чаплыгина по плоскости, были обнаружены странные аттракторы различных типов. Все обнаруженные аттракторы могут быть разделены на 2 типа: тор-хаотические аттракторы, возникающие через бифуркации разрушения квазипериодического режима (в соответствии с одним из сценариев Афраймовича-Шильникова [AfrShil1983] или же через каскад бифуркаций удвоения тора [ArnCoulSp1983]) и спиральные гомоклинические аттракторы, возникающие на основе гомоклинической структуры, образующейся в результате пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий седло-фокусной неподвижной точки.

(ПОДРОБНО) Проведено исследование хаотической динамики в неголономной механической системе, описывающей качение неуравновешенного, динамически несимметричного шара (волчка Чаплыгина) по плоскости без проскальзывания. Динамика указанной системы сводится к исследованию трехмерного точечного отображения, не обладающего свойством сохранения фазового объема. В результате исследования этого отображения удалось обнаружить странные аттракторы различных типов.

К первой группе обнаруженных аттракторов относятся аттракторы, возникающие в результате сценариев разрушения квазипериодического режима (тора для четырехмерного потока или же инвариантной кривой для трехмерного отображения). В этом направлении были обнаружены три различных сценария рождения странных аттракторов: (1) через разрушение тора через бифуркации Неймарка-Сакера внутри резонансной области [AfrShil1983]; (2) через разрушение тора через бифуркации удвоения периода внутри резонансной области [AfrShil1983]; (3) переход к хаосу через последовательность удвоения торов [ArnCoulSp1983].

Ко второй группе аттракторов относятся дискретные гомоклинические аттракторы спирального типа (типа Шильникова). В работах [GonGonShil2012] и [GonGonKazTur2014] для задач, описываемых трехмерными отображениями, были предложены сценарии возникновения дискретных (для трехмерных отображений) гомоклинических (возникающих на основе гиперболической точки, пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий которой принадлежат аттрактору) аттракторов различных типов. И, если дискретный аттрактор Лоренца и восьмерочный аттрактор ранее удавалось обнаружить в задачах неголономной механики [GonGonKaz13], [BorKazSat2014], то дискретный спиральный аттрактор, возникающий на основе

гомоклинической структуры седло-фокусной неподвижной точки, впервые был обнаружен в механической системе.

Источники

[AfrShil1983] Афраимович В. С., Шильников Л. П., “Инвариантные торы, их разрушение и стохастичность”, Методы качественной теории дифференциальных уравнений, Межвуз. тематич. сб. науч. тр., ред. Е. А. Леонтович-Андропова, ГГУ, Горький, 1983, 3–26

[ArnCoulSp1983] Arneodo A., Couillet P. H., Spiegel E. A. Cascade of period doublings of tori // *Physics Letters A*. 1983. Т. 94. №. 1. С. 1-6.

[GonGonShil2012] Гонченко А. С., Гонченко С. В., Шильников Л. П. К вопросу о сценариях возникновения хаоса у трехмерных отображений // *Нелинейная динамика*. – 2012. – Т. 8. – №. 1. – С. 3-28.

[GonGonKazTur2014] Gonchenko A., Gonchenko S., Kazakov A., Turaev D. Simple Scenarios of Onset of Chaos in Three-Dimensional Maps // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2014. Vol. 24. No. 08.

[GonGonKaz2013] Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., Kazakov A. O. Richness of chaotic dynamics in nonholonomic models of a Celtic stone // *Regular and Chaotic Dynamics*. – 2013. – vol. 18. – no. 5. – pp. 521-538.

[BorKazSat2014] Borisov A. V., Kazakov A. O., Sataev I. R. The reversal and chaotic attractor in the nonholonomic model of Chaplygin’s top // *Regular and Chaotic Dynamics*. – 2014. – vol. 19. – no. 6. – pp. 718-733.

Консервативная хаотическая динамика

(КРАТКО) Проведено исследование динамического поведения в неавтономной, медленно периодически зависящей от времени, двумерной системе типа Дюффинга. Было показано, что в рассматриваемой системе сосуществуют периодические орбиты (как гиперболического, так и эллиптического типов), области существования вечного адиабатического инварианта, а также области с хаотической гамильтоновой динамикой.

(ПОДРОБНО) Проведено исследование хаотической динамики в гамильтоновой системе типа Дюффинга, медленно периодически зависящей от времени. С помощью теории адиабатических инвариантов, теории обратимых систем и теории симплектических отображений, совместно с применением современных численных методов, в рассматриваемой системе удалось обнаружить множество траекторий различных типов. В частности, были обнаружены симметричные периодические орбиты (как гиперболического, так и эллиптического типов), области существования вечного адиабатического инварианта, а также области с хаотической гамильтоновой динамикой. С помощью численного исследования глобальных бифуркаций, связанных с возникновением гомоклинических касаний, а также с помощью построения диаграмм показателей Ляпунова получен сценарий развития хаотической динамики в системе.

Смешанная динамика

(КРАТКО) В модели связанных осцилляторов Пиковского-Топажа [PikTop2002] было показано, что хаотическая динамика, наблюдаемая в системе при ненулевом значении параметра связи, связана с возникновением в системе смешанной динамики. Изучен механизм возникновения смешанной динамики. Показано, что этот механизм связан с возникновением в системе локальных и глобальных бифуркаций потери симметрии. Локальные бифуркации в рассматриваемой системе не приводят явно к возникновению устойчивых (а значит по обратимости неустойчивых) периодических орбит. Однако за счет таких бифуркаций рождаются седловые орбиты с якобианом, отличным от единицы, на базе которых возникают гетероклинические контура, в которых возможны различные типы касаний. Из работ [DelGonGonLazSten2013] и [LambSten2004] известно, что возникновение таких контуров свидетельствуют о наличие счетного множества периодических аттракторов, репеллеров, а также эллиптических орбит. Все такие орбиты сосуществуют, притом замыкания множеств орбит различного типа имеют непустые пересечения, а значит, возникает смешанная динамика.

(ПОДРОБНО) В работе [PikTop2002] в модели связанных осцилляторов был обнаружен интересный феномен, проявляющийся при изменении параметра связи. При малых значениях параметра система демонстрирует консервативное поведение. Однако с увеличением параметра, средняя дивергенция в системе становится отрицательной. При этом, распределение инвариантной меры в прямом и обратном времени, не различимое при малых значениях параметра, становится все более и более различным с дальнейшим ростом параметра связи.

Нам удалось объяснить такое явление возникновением в системе смешанной динамики. Мы показали, что смешанная динамика в рассматриваемой системе возникает в результате локальных и глобальных бифуркаций потери симметрии, в результате которых в системе рождаются периодические орбиты, якобиан которых отличен от единицы. Локальные бифуркации потери симметрии возникают на линии неподвижных точек инволюции (на линии симметрии) и приводят к рождению симметричных периодических орбит [LerTur2012]. В рассматриваемой системе такие бифуркации приводят к рождению четырех периодических орбит, две из которых являются эллиптическими и располагаются на линии симметрии, а две седловыми.

Глобальные бифуркации потери симметрии возникают в результате возникновения гомоклинических касаний инвариантных многообразий в контурах, соединяющих седловые точки [DelGonGonLazSten2013], [LambSten2004]. Нам удалось обнаружить такие бифуркации на базе седловых точек, возникающих в результате локальных бифуркаций потери симметрии.

Источники

[PikTop2002] Topaj D., Pikovsky A. Reversibility vs. synchronization in oscillator lattices //Physica D: Nonlinear Phenomena. – 2002. – Т. 170. – №. 2. – С. 118-130.

[LerTur2012] Lerman L. M., Turaev D. Breakdown of symmetry in reversible systems //Regular and Chaotic Dynamics. – 2012. – Т. 17. – №. 3-4. – С. 318-336.

[DelGonGonLazSten2013] Delshams A. et al. Abundance of attracting, repelling and elliptic periodic orbits in two-dimensional reversible maps Dedicated to the memory of Leonid Pavlovich Shilnikov, a Master whose works strongly influenced the mathematical theory of dynamical systems // *Nonlinearity*. – 2012. – Т. 26. – №. 1. – С. 1.

[LambSten2004] Lamb J. S. W., Stenkin O. V. Newhouse regions for reversible systems with infinitely many stable, unstable and elliptic periodic orbits // *Nonlinearity*. – 2004. – Т. 17. – №. 4. – С. 1217.

2. Опубликованные и поданные в печать работы.

1. Borisov A.V., Kazakov A.O., Sataev I.R. Spiral chaos in the nonholonomic model of Chaplygin's top // *Regular and Chaotic Dynamics*. Vol. 21, No. 7-8, 2016 (в печати).

2. Lerman L., Kazakov A., Kulagin N. Relaxation Oscillations and Chaos in a Duffing Type Equation: A Case Study // *Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity*, Vol. 5, No. 4, pp. 437-454, 2016.

3. Gonchenko A.S., Gonchenko S.V., Kazakov A.O., Turaev D. On the phenomenon of mixed dynamics in Pikovsky-Toraj system of coupled rotators // arXiv preprint arXiv:1604.02417. – 2016.

4. Gonchenko A.S., Gonchenko S.V., Kazakov A.O., Turaev D. On the phenomenon of mixed dynamics in Pikovsky-Toraj system of coupled rotators // *Physica D* (направлено в печать).

3. Участие в конференциях и школах.

1. 4th Bremen Winter School and Symposium, Bremen, 14-18 March 2016

2. Sixth International Conference Geometry, Dynamics, Integrable Systems – GDIS 2016, Izhevsk, 2 – 5 June 2016.

3. III International Conference “Dynamics, Bifurcations, and Strange Attractors” – DBC-III, Nizhny Novgorod, 18-22 July 2016.

4. Работа в научных центрах и международных группах.

1. Участник гранта РФФИ № 14-41-00044 «Динамика и бифуркации диссипативных и консервативных систем» под руководством профессора университета «Имерил колледж» (Лондон, Великобритания) Тураева Д.В. Конкурс 2014-2016 на «Проведение фундаментальных научных исследований и поисковых научных исследований международными научными группами»

2. Участник гранта РФФИ № 15-12-20035 «Сложная динамика нелинейных механических и радиофизических систем и ее приложения» под руководством профессора саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского. Кузнецова С.П.

5. Педагогическая деятельность.

1. Лекционные курсы и семинары по дисциплинам «Логика и алгоритмы» в национальном исследовательском университете Высшая школа экономики (Нижний Новгород).
2. Лекционные курсы и семинары по дисциплинам «Дискретная математика» в национальном исследовательском университете Высшая школа экономики (Нижний Новгород).
3. Спецкурс «Аналитические и численные методы исследования динамических систем» в национальном исследовательском университете Лобачевского (Нижний Новгород).
4. Спецкурс «Бифуркации отображений» в национальном исследовательском университете Лобачевского (Нижний Новгород).