

Отчет о научной и педагогической деятельности по гранту фонда «Династия» за 2017 год

Казачков Алексей Олегович

1. Научные результаты

В рамках работ над проектом были получены новые результаты исследования

- странных аттракторов;
- консервативного хаоса;
- смешанной динамики.

Далее будут описаны результаты исследования по каждому из трех пунктов заявки, полученные в 2017 г.

1. Странные аттракторы

Все странные аттракторы можно разделить на 3 класса: гиперболические, псевдогиперболические и квазиаттракторы. *Гиперболические аттракторы* являются структурно-устойчивыми, т.е. их структура и свойства не меняются при незначительных изменениях параметров или правых частей в определяющих уравнениях. Теория таких аттракторов развивается с 70-х годов, а их хаотическая природа очень хорошо математически обоснована. Самыми известными примерами гиперболических аттракторов являются соленоид Смейла-Вильямса и аттрактор Плькина. Совсем другую природу имеют *псевдогиперболические аттракторы и квазиаттракторы*. Такие аттракторы не являются структурно-устойчивыми, то есть в пространстве динамических систем, в окрестностях систем с такими аттракторами всюду плотны системы с гомоклиническими касаниями, в результате чего при любых изменениях параметров в уравнениях «внутри» таких аттракторов возникают бифуркации. При этом для псевдогиперболических аттракторов такие бифуркации не приводят к рождению устойчивых периодических орбит (рождаются седловые орбиты различных индексов), то есть такие аттракторы, наравне с гиперболическими, могут считаться «настоящими хаотическими». В случае квазиаттракторов в результате таких бифуркаций рождаются устойчивые (а также седловые) периодические орбиты. Основы теории псевдогиперболических аттракторов были заложены сравнительно недавно в работе Тураева, Шильникова в 1998 [TurShil98], а на сегодняшний день известны лишь единицы таких аттракторов (дискретный аттрактор Лоренца и дискретный восьмерочный аттрактор). Теория квазиаттракторов развивается, начиная с работы Афраймовича, Шильникова, [AfrShil83]. К таким аттракторам относятся, например, аттрактор Эно и аттракторы спирального типа.

1.1. Аттракторы спирального типа

Следует отметить, что спиральные аттракторы, связанные с возникновением гомоклинической траектории к седло-фокусному состоянию равновесия, являются одними из основных и первых примеров хаотической динамики в трехмерных системах с непрерывным временем. Согласно теореме Шильникова [Shilnikov65] в любой

окрестности гомоклинической траектории к седло-фокусному состоянию равновесия (при выполнении некоторых условий на собственные числа этого состояния равновесия) существует счетное множество седловых периодических траекторий, вследствие чего поведение системы в окрестности такой гомоклинической траектории является весьма сложным. В рамках данного направления получены следующие результаты:

- Показано, что аттракторы спирального типа в осцилляторных системах Арнеодо-Колле-Трессе, Ресслера и Розенцвейга-Макартура возникают в однопараметрических семействах по сценарию Шильникова [Shilnikov86] на основе гомоклинической траектории к седло-фокусу с двумерным неустойчивым многообразием, а не за счет гомоклиники к седло-фокусу, обладающему одномерным неустойчивым многообразием как ранее полагалось в работах Арнеодо-Колле-Трессе 1980-1982 [ACT80, ACT82]. Предложен новый метод поиска и классификации гомоклинических аттракторов в трехмерных системах с непрерывным временем. Результаты исследования системы Арнеодо-Колле-Трессе-1980 [ACT80] опубликованы в работе: Ю.Баханова, А.Казаков, А.Коротков, Спиральный хаос в моделях типа Лотки-Вольтерры // Журнал Средневолжского математического общества, 2017, Т. 19, № 2, 13–24. (<http://journal.svmo.ru/archive/article?id=1553>). Результаты исследования осцилляторных систем Арнеодо-Колле-Трессе-1982 [ACT82], а также методы поиска и классификации гомоклинических потоковых аттракторов опубликованы в статье: А.Казаков, А.Козлов, А.Коротков, О гомоклинических аттракторах в трехмерных системах с постоянной дивергенцией // Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании: материалы XIII Международной научной конференции, (Саранск, 12-16 июля 2017 г.) - Саранск: СВМО, 2017. - С. 364-369 (<http://conf.svmo.ru/files/deamm2017/papers/paper51.pdf>).
- Проведено исследование хаотической динамики в системе пяти идентичных осцилляторов, связанных с помощью связи Hansel-Mato-Meunier (Kuramoto-Daido). Показано, что ранее обнаруженные в работе [AOWT07] дискретные странные аттракторы имеют спиральную природу и возникают согласно сценарию Гонченко-Гонченко-Шильникова [GonGonShil2012], то есть являются дискретными аттракторами Шильникова. Важно отметить, что странные аттракторы такого типа являются новыми и ранее не встречались в осцилляторных системах. Результаты исследований опубликованы в архиве (Grines E., Kazakov A. Discrete Shilnikov attractor and chaotic dynamics in the system of five identical globally coupled phase oscillators with biharmonic coupling. <https://arxiv.org/pdf/1712.03839.pdf>).

1.2. Псевдогиперболические аттракторы

Основы теории псевдогиперболических аттракторов были заложены в работе Тураева, Шильникова в 1998 [TurShil98], где была предложена геометрическая модель дикого (псевдогиперболического) аттрактора. Позднее теория псевдогиперболических аттракторов была развита в работе Тураева, Шильников в 2008 году в работе [TurShil08]. В рамках работ над проектом по псевдогиперболическим аттракторам были получены следующие результаты:

- На основе системы Лоренца сконструирована четырехмерная система, демонстрирующая дикий спиральный аттрактор Тураева-Шильникова. Проверены необходимые и достаточные условия псевдогиперболичности. Кроме того, в трехмерных обобщенных отображениях Эно обнаружены некоторые новые псевдогиперболические аттракторы, такие как дискретный аттрактор Лоренца с лакуной, дискретный супервосьмерочный аттрактор и др. Результаты исследования опубликованы в работе: А.Гонченко, С.Гонченко, А.Казаков, А.Козлов. Математическая теория динамического хаоса и её приложения: Обзор. Часть 1. Псевдогиперболические аттракторы // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25, No 2. P. 4–36, а также выложены в архиве (А.Гонченко, С.Гонченко, А.Казаков, А.Козлов. Elements of contemporary mathematical theory of dynamical chaos. Part 1. Pseudohyperbolic attractors. <https://arxiv.org/pdf/1712.04032.pdf>)
- Разработаны методы проверки псевдогиперболичности аттракторов как в многомерных потоковых системах, так и в многомерных системах с дискретным временем. С помощью разработанных методов показана псевдогиперболичность дискретного аттрактора Лоренца в неголономной модели кельтского камня [GonGonKaz2013] и восьмерочного аттрактора в неголономной модели волчка Чаплыгина [BorKazSat2014]. Результаты работы опубликованы в архиве А.Гонченко, С.Гонченко, А.Казаков, А.Козлов. Elements of contemporary mathematical theory of dynamical chaos. Part 1. Pseudohyperbolic attractors. <https://arxiv.org/pdf/1712.04032.pdf>.

Источники

[TurShil98] Turaev D.V., Shilnikov L.P. An example of a wild strange attractor.// Sb. Math., 1998, v.189, 291–314.

[AfrShil1983] Afraimovich V. S., Shil'nikov, LP [1983]" Strange attractors and quasi-attractors," //Nonlinear Dynamics and Turbulence. – С. 1-28.

[Shilnikov65] Шильников Л. П. Об одном случае существования счетного множества периодических движений //ДАН СССР. - 1965. - Т. 160. - №. 3. - С. 558-561.

[Shilnikov86] Шильников Л. П. Теория бифуркаций и турбулентность // Методы качественной теории дифференциальных уравнений: Межвуз. сб. ЕА Леонтович (отв. ред.) и др. Горький: ГГУ. – 1986. – С. 150-163.

[ACT80] Arneodo A., Coulet P., Tresser C. Occurrence of strange attractors in three-dimensional Volterra equations // Physics Letters A. - 1980. - Т. 79. - №. 4. - С. 259-263.

[ACT82] Arneodo A., Coulet P., Tresser C. Oscillators with chaotic behavior: an illustration of a theorem by Shil'nikov // Journal of Statistical Physics. - 1982. - Т. 27. - №. 1. - С. 171-182.

[AOWT07] Peter Ashwin, Gábor Orosz, John Wordsworth, and Stuart Townley. Dynamics on Networks of Cluster States for Globally Coupled Phase Oscillators. SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, 6(4):728–758, 2007.

[GonGonShil2012] Гонченко А. С., Гонченко С. В., Шильников Л. П. К вопросу о сценариях возникновения хаоса у трехмерных отображений // Нелинейная динамика. – 2012. – Т. 8. – №. 1. – С. 3-28.

[TurShil08] Тураев Д. В., Шильников Л. П. Псевдогиперболичность и задача о периодическом возмущении аттракторов лоренцевского типа // Доклады Академии наук. – Федеральное государственное унитарное предприятие Академический научно-издательский, производственно-полиграфический и книгораспространительский центр Наука, 2008. – Т. 418. – №. 1. – С. 23-27.

[GonGonKaz2013] Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., Kazakov A. O. Richness of chaotic dynamics in nonholonomic models of a Celtic stone // Regular and Chaotic Dynamics. – 2013. – vol. 18. – no. 5. – pp. 521-538.

[BorKazSat2014] Borisov A. V., Kazakov A. O., Sataev I. R. The reversal and chaotic attractor in the nonholonomic model of Chaplygin's top // Regular and Chaotic Dynamics. – 2014. – vol. 19. – no. 6. – pp. 718-733.

Консервативная хаотическая динамика

Построены бифуркационные диаграммы резонансных периодических орбит 1:3 и 1:4, возникающих в окрестности эллиптической точки в семействе кубических обратимых (реверсивных) отображений Эно. Для обратимых консервативных отображений типа Эно предложен метод построения возмущений, сохраняющих обратимость, но разрушающих консервативность. Построен пример, иллюстрирующий теорему из работы [GLRT2014] и показывающий, что вблизи эллиптической периодической точки обратимого отображения резонансные зоны должны содержать асимптотически устойчивые и асимптотически неустойчивые периодические орбиты. Подготовлен препринт статьи с полученными результатами.

Источники

[GLRT2014] S.V. Gonchenko, J.S.W. Lamb, I.Rios and D.Turaev. Attractors and repellers near generic elliptic points of reversible maps // Doklady Mathematics. – Springer US, 2014. – Т. 89. – №. 1. – С. 65-67.

Смешанная динамика

До недавнего времени общепринятым было представление о том, что динамический хаос бывает двух видов: консервативный и диссипативный. Консервативный хаос характерен неинтегрируемым системам, фазовый объем в которых сохраняется. Самым наглядным его примером является гамильтонов хаос. Диссипативный хаос наблюдается в системах, фазовый объем в которых сжимается в процессе эволюции, оседая, в конечном счете, на некоторые компактные предельные режимы - странные аттракторы. Одним из недавних достижений теории динамического хаоса является открытие третьего, нового вида динамического хаоса, т.н. «смешанной динамики», который характеризуется невозможностью отделить аттракторы системы от репеллеров и от зон консервативного поведения. Смешанная динамика отличается как от диссипативного, так и от консервативного хаоса и является типичным явлением для обратимых систем, фазовое

пространство которых содержит как области сжатия, так и области растяжения объема. Теоретические основы смешанной динамики были заложены в 1997 в работе [GonTurShil97], в 2004 году, в работе [LambSten2004], эти результаты были перенесены на обратимые двумерные отображения, а совсем недавно вышла фундаментальная работа по теории этого явления [GonTur2017].

Не смотря на то, что такое явление было обнаружено сравнительно недавно, уже удалось обнаружить ряд систем из различных приложений, демонстрирующих смешанную динамику. Например, осцилляторные системы [PikTop2002], системы неголономной механики [GonGonKaz2013, Kaz2013] и др. При этом во всех вышеперечисленных случаях смешанная динамика, на численных экспериментах, представляла собой хаотическое море (как в гамильтоновых системах), размер которого сопоставим со всем фазовым пространством, а внутри которого, помимо эллиптических островов, удавалось также обнаружить устойчивые и вполне неустойчивые периодические орбиты с близкими к единице якобианами. При этом фазовые портреты полных аттракторов [GonTur2017] визуально были очень похожи на портреты полных репеллеров, отличаясь от них лишь в деталях. По всей видимости, такие незначительные различия возникали за счет слабого сжатия (растяжения) объемов в соответствующих динамических системах. Визуально смешанная динамика такого типа похожа на «квазиконсервативный хаос».

Совсем недавно мы обнаружили принципиально другой (сильно диссипативный) тип смешанной динамики, для которого аттрактор сильно отличается от репеллера, пересекаясь с ним по «тонкому множеству». Предложен сценарий возникновения сильно диссипативной смешанной динамики, а его реализация продемонстрирована на модели, описывающей движений двух точечных вихрей одинаковой интенсивности, находящихся под воздействие волнового возмущения и сдвигового потока. Статья с описанными результатами выложена в архив: Kazakov A.O. On a scenario of onset of strongly dissipative mixed dynamics, а также направлена в журнал *Physica D: Nonlinear Phenomena*.

Источники

[GonGonShil97] Gonchenko S. V., Shilnikov L. P., Turaev D. V. On Newhouse domains of two-dimensional diffeomorphisms which are close to a diffeomorphism with a structurally unstable heteroclinic cycle // *Proc. Steklov Inst. Math.* – 1997. – Vol. 216. – pp. 70--118.

[LambSten2004] Lamb J. S. W., Stenkin O. V. Newhouse regions for reversible systems with infinitely many stable, unstable and elliptic periodic orbits // *Nonlinearity*. – 2004. – Vol. 17. – No. 4. – pp. 1217.

[GonTur2017] Gonchenko S., Turaev D. On three types of dynamics, and the notion of attractor // *Trudy Matematicheskogo Instituta imeni V.A. Steklova*, 2017, Vol. 297, pp. 133--157.

[PikTop2002] Topaj D., Pikovsky A. Reversibility vs. synchronization in oscillator lattices // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. – 2002. – Т. 170. – №. 2. – С. 118-130.

[LerTur2012] Lerman L. M., Turaev D. Breakdown of symmetry in reversible systems // *Regular and Chaotic Dynamics*. – 2012. – Т. 17. – №. 3-4. – С. 318-336.

[GonGonKaz2013] Gonchenko A.S., Gonchenko S.V., Kazakov A.O. Richness of chaotic dynamics in nonholonomic models of a Celtic stone // Regular and Chaotic Dynamics. – 2013. – Vol. 18. – No. 5. – pp. 521--538.

[Kaz2013] Kazakov A.O. Strange attractors and mixed dynamics in the problem of an unbalanced rubber ball rolling on a plane // Regular and Chaotic Dynamics. – 2013. – Vol. 18. – No. 5. – pp. 508--520.

2. Опубликованные и поданные в печать работы.

1. Баханова Ю. В., Казаков А. О., Коротков А. Г. Спиральный хаос в моделях типа Лотки-Вольтерры // Журнал Средневолжского математического общества. — 2017. — Т. 19, № 2. — С. 13–24.

2. Гонченко А.С., Гонченко С.В., Казаков А.О., Козлов А.Д. Математическая теория динамического хаоса и её приложения: Обзор. Часть 1. Псевдогиперболические аттракторы // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25, № 2. С. 4–36.

3. Gonchenko A.S., Gonchenko S.V., Kazakov A.O., Turaev D.V. On the phenomenon of mixed dynamics in Pikovsky–Topaj system of coupled rotators //Physica D: Nonlinear Phenomena. – 2017. – Т. 350. – С. 45-57.

4. Grines E.A., Kazakov A.O., Sataev I.R. Discrete Shilnikov attractor and chaotic dynamics in the system of five identical globally coupled phase oscillators with biharmonic coupling // arXiv preprint (<https://arxiv.org/pdf/1712.03839.pdf>)

5. Kazakov A.O. On a scenario of onset of strongly dissipative mixed dynamics. // Направлено в печать в Physica D: Nonlinear Phenomena.

3. Участие в конференциях и школах.

1. IV International Conference “Dynamics, Bifurcations, and Strange Attractors” – DBC-IV, Nizhny Novgorod, 2 – 9 July 2017.

2. Крымская осенняя математическая школа-симпозиум (КРОМШ-2017), Батилиман (Бухта Ласпи), 17 – 29 сентября 2017г.

3. International Conference "Shilnikov Workshop-2017", Nizhny Novgorod, 15 – 16 December 2017.

4. Работа в научных центрах и международных группах.

1. Участник гранта РФФИ № 17-11-01041 «Развитие фундаментальных методов геометрической теории динамических систем и слоений (энергетические функции Ляпунова, включение каскадов в потоки, эндоморфизмы, соленоидальная и хаотическая динамика, орбиформы и теория распределений)» под руководством профессора НИУ ВШЭ-НН Гринеса В.З. (Нижний Новгород, Россия)

2. Участник гранта РФФИ № 14-12-00811 «Фазовая динамика осцилляторных сред» под руководством профессора НИУ ННГУ Осипова Г.В.

5. Педагогическая деятельность.

1. Лекционные курсы и семинары по дисциплинам «Логика и алгоритмы» в национальном исследовательском университете Высшая школа экономики (Нижний Новгород).
2. Лекционные курсы и семинары по дисциплинам «Дискретная математика» в национальном исследовательском университете Высшая школа экономики (Нижний Новгород).
3. Спецкурс «Аналитические и численные методы исследования динамических систем» в национальном исследовательском университете Лобачевского (Нижний Новгород).
4. В 2017 году под руководством А.О. Казакова было защищено 2 бакалаврских дипломных работы (Баханова Ю.В. и Самылина Е.А).
5. Руководство научными работам у 3 студентов ННГУ им. Лобачевского и 5 студентов НИУ ВШЭ-НН.

6. Краткие итоги трех лет.

Задачи, поставленные во всех трех пунктах заявки (странные аттракторы, смешанная динамика и консервативный хаос), выполнены в полном объеме. Отдельно хотелось бы отметить результаты исследования смешанной динамики:

- разработка сценариев возникновения смешанной динамики;
- обнаружение смешанной динамики в конкретных системах (неголономные модели волчка Сулова, система связанных осцилляторов Пиковского-Топажа, модель движения двух возмущенных точечных вихря);
- открытие смешанной динамики нового типа – т.н. сильно диссипативной смешанной динамики;

и странных аттракторов:

- обнаружение псевдогиперболического восьмерочного аттрактора в неголономной модели волчка Чаплыгина;
- обнаружение дикого аттрактора Тураева-Шильникова;
- разработка методов проверки псевдогиперболическости аттракторов;
- исследование аттракторов спирального типа (в системах Ресслера, Арнеодо-Колле-Трессе, в неголономной модели волчка Чаплыгина).

В рамках работ над проектом опубликовано более 10 работ (3 из которых в журналах, индексируемых в Scopus и Web of Science).