Отчет по гранту фонда "Династия"за 2015 год

Д.В. Кориков .

Исследованы стационарная и нестационарная системы уравнений Максвелла в области с малым отверстием, получены полные асимптотические разложения решений. Особенности исследования стационарной системы Максвелла связаны с её переопределенностью. Исследование нестационарной задачи, кроме этого, требует дальнейшего развития методов теории динамических краевых задач в областях с кусочно-гладкой границей, предложенных в [3].

Развитый подход позволяет описать поведение электромагнитного поля внутри резонатора с малым металлическим включением. Модель корректна, если

$$\delta \ll \varepsilon \ll \lambda,$$

где δ - толщина скин-слоя, ε - диаметр малого металлического включения, λ - длина волны. Исследованные задачи имеют приложения в диагностике плазмы - определению наличия в плазме малых металлических частиц по возмущениям, вносимым ими в электромагнитное поле.

I. Результаты, полученные в этом году.

1. Рассмотрена стационарная система Максвелла

$$\left\{\begin{array}{rl} i\mathrm{rot}u^2(x,\tau,\varepsilon)+\tau u^1(x,\tau,\varepsilon) & = f^1(x,\tau), \\ -i\mathrm{rot}u^1(x,\tau,\varepsilon)+\tau u^2(x,\tau,\varepsilon) & = f^2(x,\tau), \\ -i\mathrm{div}u^1(x,\tau,\varepsilon) & = g^1(x,\tau), \\ -i\mathrm{div}u^2(x,\tau,\varepsilon) & = g^2(x,\tau) \end{array}\right. \qquad (1)$$

в ограниченной области $\Omega(\varepsilon)$ с малым отверстием $\omega(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : \varepsilon^{-1}x \in \omega\}$ (здесь ω - ограниченная область с гладкой границей, содержащая начало координат, $\varepsilon > 0$ - малый параметр). При $\varepsilon \to 0$ малое отверстие вырождается в выколотую точку - начало координат. Параметр $\tau = \sigma - i\gamma$ ($\sigma \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$) фиксирован. На $\partial\Omega(\varepsilon)$ заданы краевые условия, отвечающие идеально проводящей границе

$$\nu(x) \times u^1(x,\tau,\varepsilon) = \vec{0},\ \langle \nu(x), u^2(x,\tau,\varepsilon)\rangle = 0 \qquad (2)$$

(здесь и далее ν - единичный вектор внешней нормали, $\langle \zeta, \eta\rangle$ - скалярное произведение векторов $\zeta, \eta \in \mathbb{C}^l$). Получено асимптотическое разложение решения $(u^1(\cdot,\tau,\varepsilon), u^2(\cdot,\tau,\varepsilon))^T$ при $\varepsilon \to 0$ с оценкой остатка. Метод вывода асимптотики следующий. Добавлением двух неизвестных скалярных функций a^1, a^2 задача (1), (2) расширяется до эллиптической краевой задачи

$$(A(D_x)+\tau)\mathbf{u}(x,\tau,\varepsilon) = \mathbf{f}(x), \qquad x \in \Omega(\varepsilon); \qquad (3)$$

$$\Gamma\mathbf{u}(x,\tau,\varepsilon) = 0, \qquad x \in \partial\Omega(\varepsilon), \qquad (4)$$

где $\mathbf{u} = (u^1, u^2, a^1, a^2)^T$, $\mathbf{f} = (f^1, f^2, g^1, g^2)^T$. Асимптотика решения эллиптической задачи при $\varepsilon \to 0$ ищется методом составных асимптотических разложений (см. [1]). В этом методе асимптотика решения составляется из решений так называемых предельных задач, не зависящих от ε. Для области с малым отверстием таких задач две: первая предельная задача в области Ω с "заклеенным"отверстием, и вторая предельная задача во внешности отверстия фиксированного диаметра. При этом решение второй предельной задачи компенсирует при $\varepsilon \to 0$ главный член невязки в граничном условии на $\partial\omega(\varepsilon)$ от решения первой предельной задачи. Последний шаг - доказательство возможности возврщения к исходной, нерасширенной, системе Максвелла в асимптотическом разложении при выполнении условий совместности

$$\begin{aligned} \mathrm{div} f^k(x) - i\tau g^k(x) = 0, &\quad x \in \Omega,\, k = 1,2, \\ \langle f^2(x), \nu(x)\rangle = 0, &\quad x \in \partial\Omega, \\ \langle f^2(x), \nu(x)\rangle = 0, &\quad x \in \partial\omega(\varepsilon) \text{ при всех } \varepsilon \in (0,\varepsilon_0) \end{aligned} \tag{5}$$

(эти условия обеспечивают разрешимость задачи (1), (2) при всех $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$). Основной результат (в сокращенном виде) сформулирован ниже.

Теорема 1. *1. Пусть* $\mathbf{f} \in C^\infty(\overline{\Omega})$. *Решение* $\mathbf{u}(\cdot,\varepsilon)$ *задачи (3), (4) при всяком* $N \in \mathbb{N}$ *допускает асимптотическое разложение*

$$\mathbf{u}(x,\tau,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{N+1} \left(\varepsilon^{n-1}\chi(x)\mathbf{w_{n-1}}(\varepsilon^{-1}x,\tau) + \varepsilon^n \mathbf{v_n}(x,\tau)\right) + \mathbf{\tilde{u}_{N+1}}(x,\tau,\varepsilon). \tag{6}$$

с остатком $\mathbf{\tilde{u}_{N+1}}(\cdot,\varepsilon)$, *при всех* $\delta > 0$ *допускающим оценку*

$$\int\limits_{\Omega(\varepsilon)} \Big(|\mathbf{\tilde{u}_{N+1}}(x,\varepsilon)|^2 + \sum_{i=1}^{3} |x|^2 |\partial_{x^i} \mathbf{\tilde{u}_{N+1}}(x,\varepsilon)|^2\Big) dx = O(\varepsilon^{2N+3-\delta}).$$

В разложении (6) $\chi \in C_c^\infty(\Omega)$ *- это гладкая срезающая функция, равная единице вблизи начала координат, функции* $\mathbf{v_n} = (v_n^1, v_n^2, b_n^1, b_n^2)^T \in C^\infty(\overline{\Omega})$ *и* $\mathbf{w_n} = (w_n^1, w_n^2, \varrho_n^1, \varrho_n^2)^T \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \backslash \omega)$ *являются решениями первых и вторых предельных задач, соответственно (формулировка этих задач приведена в работе).*

2. Если функция $\mathbf{f}$ *удовлетворяет условиям совместности (5), то при всех* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ *скалярные компоненты* a^1, a^2 *функции* $\mathbf{u}(\cdot,\tau,\varepsilon)$ *аннулируются, а векторные компоненты* $u^1(\cdot,\tau,\varepsilon), u^2(\cdot,\tau,\varepsilon)$ *удовлетворяют исходной, нерасширенной, задаче (1), (2). При этом функция* $\mathbf{w_{-1}}$, *и скалярные компоненты* b_n^i, ϱ_n^i $(i = 1,2)$ *функций* $\mathbf{v_n}$, $\mathbf{w_n}$ *также аннулируются, а предельные задачи для этих функций можно переформулировать в терминах исходного, нерасширенного, оператора Максвелла.*

Кроме того, было сделано обобщение результатов на случай импедансных граничных условий

$$\nu \times [u^2 \times \nu] + Z[\nu \times u^1] = 0,$$

на $\partial\Omega(\varepsilon)$; здесь $Z = \mathrm{const}$, $\mathrm{Re} Z < 0$.

2. Рассмотрена динамическая система Максвелла

$$\left\{ \begin{aligned} \partial_t \mathcal{U}^1(x,t,\varepsilon) - \mathrm{rot}\,\mathcal{U}^2(x,t,\varepsilon) &= \mathcal{F}^1(x,t), \\ \partial_t \mathcal{U}^2(x,t,\varepsilon) + \mathrm{rot}\,\mathcal{U}^1(x,t,\varepsilon) &= \mathcal{F}^2(x,t), \\ \mathrm{div}\,\mathcal{U}^1(x,t,\varepsilon) &= \mathcal{G}^1(x,t), \\ \mathrm{div}\,\mathcal{U}^2(x,t,\varepsilon) &= \mathcal{G}^2(x,t) \end{aligned} \right. \tag{7}$$

в цилиндре $Q = \{(x,t) :\ x \in \Omega(\varepsilon),\ t \in \mathbb{R}\}$, основанием которого является область $\Omega(\varepsilon)$ с малым отверстием. Функции $\mathcal{U}^1$,$\mathcal{U}^2$ подчинены условиям

$$\nu(x) \times \mathcal{U}^1(x,t,\varepsilon) = \vec{0},\ \langle \nu(x), \mathcal{U}^2(x,t,\varepsilon)\rangle = 0 \tag{8}$$

на границе цилиндра. Получено асимптотическое разложение решения $(\mathcal{U}^1(\cdot,\cdot,\varepsilon),\mathcal{U}^2(\cdot,\cdot,\varepsilon))^T$ при $\varepsilon\to 0$ с оценкой остатка. Для вывода асимптотики решения задача (7), (8) расширяется до гиперболической задачи

$$(\partial_t + A(\partial_x))\boldsymbol{\mathcal{U}}(x,t,\varepsilon) = \boldsymbol{\mathcal{F}}(x,t), \qquad (x,t)\in\Omega(\varepsilon)\times\mathbb{R}; \tag{9}$$

$$\Gamma\boldsymbol{\mathcal{U}}(x,t,\varepsilon) = 0, \qquad (x,t)\in\partial\Omega(\varepsilon)\times\mathbb{R}, \tag{10}$$

где $\boldsymbol{\mathcal{U}} = (\mathcal{U}^1,\mathcal{U}^2,\mathcal{A}^1,\mathcal{A}^2)^T$, $\boldsymbol{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}^1,\mathcal{F}^2,\mathcal{G}^1,\mathcal{G}^2)^T$. После преобразования Фурье $\mathfrak{F}_{t\to\tau}$ (здесь $\tau=\sigma-i\gamma$, где $\sigma\in\mathbb{R},\gamma=\mathrm{const}>0$) формулы (9), (10) принимают вид (3), (4). При фиксированном τ задача (3), (4) является эллиптической, и асимптотика ее решения находится методом составных разложений. Однако для возвращения к гиперболической задаче (9), (10) требуется равномерная по параметру τ оценка остатка асимптотического разложения.

Первая предельная задача не является эллиптической с учетом параметра τ (в смысле Аграновича-Вишика, см. [2]), поэтому эллиптическая оценка во всей области Ω решения этой задачи и его первых производных не будет равномерной по параметру τ. Поэтому приходится применять метод, развитый в работах [3]-[6] для гиперболических задач в областях с ребрами. В окрестности начала координат, имеющей диаметр порядка $|\tau|^{-1}$ - эллиптической зоне - выводится эллиптическая оценка решения первой предельной задачи и его производных. Благодаря такой оценке можно описать поведение решения первой предельной задачи в эллиптической зоне. В оставшейся части области Ω используется гиперболическая оценка решения по L_2-норме. Эллиптическая и гиперболическая оценки склеиваются в промежуточной зоне, давая комбинированную оценку, равномерную по параметру τ. При помощи этой оценки исследуется асимптотика решения первой предельной задачи.

При $\varepsilon|\tau|\le\mathrm{const}$ асимптотика решения задачи (3), (4) ищется методом составных разложений, при этом используются комбинированные оценки, описанные выше. При $\varepsilon|\tau|\ge\mathrm{const}$ эллиптическая зона находится внутри малого отверстия $\omega(\varepsilon)$, поэтому в асимптотике решения первой предельной задачи нельзя перейти к следу на границе $\partial\omega(\varepsilon)$ малого отверстия. Таким образом, при больших τ становится невозможным описать поведение невязки от решения первой предельной задачи в граничном условии на $\partial\omega(\varepsilon)$. Это значит, что при $\varepsilon|\tau|\ge\mathrm{const}$ (иначе говоря, для описания поведения волн, длина которых меньше, чем диаметр малого отверстия) метод составных асимптотических разложений становится неприменим. Поэтому на правую часть $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ уравнения (9) накладывается условие гладкости по времени, благодаря которому вклад коротких волн оказывается пренебрежимо малым при $\varepsilon\to 0$.

Обратное преобразование Фурье $\mathfrak{F}^{-1}_{\tau\to t}$ доставляет асимптотику решения задачи (9), (10). После этого доказывается возможность возвращения к исходной, нерасширенной, задаче (7), (8) в асимптотическом разложении при выполнении условий совместности

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\mathcal{F}^k(x,t) - \partial_t\mathcal{G}^k(x,t) = 0, &\quad (x,t)\in\Omega(\varepsilon)\times\mathbb{R},\ k=1,2,\\ \langle\mathcal{F}^2(x,t),\nu(x)\rangle = 0, &\quad (x,t)\in\partial\Omega\times\mathbb{R}.\\ \langle\mathcal{F}^2(x,t),\nu(x)\rangle = 0, &\quad (x,t)\in\partial\omega(\varepsilon)\times\mathbb{R} \text{ при всех } \varepsilon\in(0,\varepsilon_0). \end{aligned} \tag{11}$$

Основной результат (в сокращенном виде) сформулирован ниже.

Теорема 2. *1. Пусть $N\in\mathbb{N}$, $\gamma>0$, и правая часть $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ задачи (9),(10) удовлетворяет условию*

$$\int\limits_{t=-\infty}^{+\infty}\int\limits_{x\in\Omega} e^{-2\gamma t}|x|^{-2B}|\mathbf{P}(\gamma)^M\boldsymbol{\mathcal{F}}(x,t)|^2dxdt<\infty,$$

в котором $B=B(N)$, $M=M(N)$ - достаточно большие числа, и оператор $\mathbf{P}(\gamma)$ задан формулой

$$\mathbf{P}(\gamma)\boldsymbol{\mathcal{F}} = \mathfrak{F}^{-1}_{\tau\to t}\big(|\tau|\mathfrak{F}_{t\to\tau}\boldsymbol{\mathcal{F}}\big).$$

Тогда решение $\boldsymbol{\mathcal{U}}(\cdot,\cdot,\varepsilon)$ *задачи (9),(10) допускает асимптотическое разложение*

$$\boldsymbol{\mathcal{U}}(x,t,\varepsilon)=\sum_{n=0}^{N+1}\Big(\varepsilon^{n-1}\chi(x)\boldsymbol{\mathcal{W}}_{\boldsymbol{n-1}}(\varepsilon^{-1}x,t)+\varepsilon^{n}\boldsymbol{\mathcal{V}}_{\boldsymbol{n}}(x,t)\Big)+\tilde{\boldsymbol{\mathcal{U}}}_{\boldsymbol{N+1}}(x,t,\varepsilon),\tag{12}$$

с остатком $\tilde{\boldsymbol{\mathcal{U}}}_{\boldsymbol{N+1}}(\cdot,\cdot,\varepsilon)$*, при любом* $\delta>0$ *подчиненным оценке*

$$\int\limits_{t=-\infty}^{+\infty}\int\limits_{x\in\Omega(\varepsilon)}e^{-2\gamma t}|\tilde{\boldsymbol{\mathcal{U}}}_{\boldsymbol{N+1}}(x,t,\varepsilon)|^2dxdt=O(\varepsilon^{2N+3-\delta}).$$

В разложении (12) функции $\boldsymbol{\mathcal{V}}_{\boldsymbol{n}}=(\mathcal{V}_n^1,\mathcal{V}_n^2,\mathcal{B}_n^1,\mathcal{B}_n^2)^T$ *и* $\boldsymbol{\mathcal{W}}_{\boldsymbol{n}}=(\mathcal{W}_n^1,\mathcal{W}_n^2,\mathcal{H}_n^1,\mathcal{H}_n^2)^T$ *являются решениями первой предельной задачи в* $\Omega\times\mathbb{R}$*, и второй предельной задачи в* $\left(\mathbb{R}^3\backslash\overline{\omega}\right)\times\mathbb{R}$*, соответственно (формулировка этих задач приведена в работе).*

2. Пусть $\varepsilon_0>0$*, и функция* $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ *удовлетворяет условию*

$$\mathfrak{F}_{t\to\tau}\boldsymbol{\mathcal{F}}(\cdot,\tau)\in\bigcap_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)}H_{Max}(\varepsilon),\tag{13}$$

где пространство $H_{Max}(\varepsilon)$ *- это замыкание множества*

$$H_{Max}(\varepsilon)=\{(f^1,f^2,g^1,g^2)^T\in C_c^\infty(\overline{\Omega};\mathbb{C}^8):\operatorname{div}f^k=i\tau g^k \text{ в } \Omega(\varepsilon)\ (k=1,2);\ \langle f^2,\nu\rangle=0 \text{ на } \partial\Omega(\varepsilon)\}$$

по норме в $L_2(\Omega(\varepsilon))$*. Тогда при всех* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ *скалярные компоненты* $\mathcal{A}^1,\mathcal{A}^2$ *функции* $\boldsymbol{\mathcal{U}}(\cdot,\cdot,\varepsilon)$ *аннулируются, а векторные компоненты* $\mathcal{U}^1(\cdot,\cdot,\varepsilon)$*,*$\mathcal{U}^2(\cdot,\cdot,\varepsilon)$ *удовлетворяют нерасширенной задаче (7), (8). При этом функция* $\boldsymbol{\mathcal{W}}_{\boldsymbol{-1}}$*, и скалярные компоненты* $\mathcal{B}_n^i$*,* $\mathcal{H}_n^i$ $(i=1,2)$ *функций* $\boldsymbol{\mathcal{V}}_{\boldsymbol{n}}$*,* $\boldsymbol{\mathcal{W}}_{\boldsymbol{n}}$ *также аннулируются, а предельные задачи для этих функций можно переформулировать в терминах исходного, нерасширенного, оператора Максвелла. Условие (13) представляет собой обобщенную формулировку условий совместности (11).*

Как и в стационарной ситуации, получено обобщение результатов на случай импедансных граничных условий на $\partial\Omega(\varepsilon)$.

II. Публикации.

В настоящее время заканчивается подготовка к публикации совместной с Б.А. Пламеневским работы *"Асимптотика решений стационарной и динамической систем уравнений Максвелла в областях с малыми отверстиями"* с подробным изложением полученных результатов.

III. Участие в конференциях и научных школах.

Конференция „Встреча поколений“ фонда Дмитрия Зимина „Династия“, 9-11 июня 2015 года, Москва.

IV. Педагогическая деятельность.

Педагогической деятельностью не занимался.

Список литературы

[1] Maz'ya V.G., Nazarov S.A., Plamenevskii B.A., *Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains*, v. 1, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 2000.

[2] Агранович М. С., Вишик М.И., *Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида*, УМН, **19**:3(117) (1964), 53-161.

[3] Пламеневский Б.А., *О задаче Дирихле для волнового уравнения в цилиндре с ребрами*, Алгебра и анализ **10** (1998), №2, 197–228. (Поправка к ст.: **10** (1998), №3, 224).

[4] Кокотов А.Ю., Пламеневский Б.А., *Об асимптотике решений задачи Неймана для гиперболических систем в областях с коническими точками*, Алгебра и анализ **16** (2004), №3, 56–98.

[5] Матюкевич С.И., *О нестационарной системе Максвелла в областях с ребрами*, Алгебра и анализ **15** (2003), №6, 86–140.

[6] Матюкевич С.И., Пламеневский Б.А., *О динамических задачах теории упругости в областях с ребрами*, Алгебра и анализ **18** (2006), №3, 158–233.