Отчет по гранту фонда "Династия"за 2016 год

Д.В. Кориков .

I. Результаты, полученные в этом году.

Опубликована совместная с Б.А. Пламеневским статья [1]. В этой статье исследована нестационарная система Максвелла в ограниченной области $\Omega(\varepsilon)$ с конечным числом малых полостей; диаметры полостей пропорциональны малому параметру ε. Выведены и обоснованы полные асимптотические разложения решений при $\varepsilon \to 0$. На границе области заданы условия идеальной проводимости либо импедансные граничные условия; время t в задаче пробегает всю вещественную ось. Малые отверстия являются "сингулярными" возмущениями области: при $\varepsilon \to 0$ они переходят в выколотые точки.

Представленная математическая модель описывает поведение электромагнитного поля внутри проводящего резонатора с включениями металлических частиц малых размеров. Модель является корректной, если диаметры частиц металла много больше толщины скин-слоя в металле. Такая модель может иметь приложения к диагностике плазмы, загрязненной металлическими частицами и заполняющей резонатор.

Поясним метод, применяемый в работе, на примере области $\Omega(\varepsilon)$ с единственным отверстием $\omega(\varepsilon)$, стягивающимся при $\varepsilon \to 0$ к началу координат. Сначала нестационарная система Максвелла расширяется до гиперболической задачи

$$(\partial_t + A(\partial_x))\boldsymbol{\mathcal{U}}(x,t,\varepsilon) = \boldsymbol{\mathcal{F}}(x,t), (x,t) \in \Omega(\varepsilon)\times\mathbb{R};\ \Gamma\boldsymbol{\mathcal{U}}(x,t,\varepsilon) = 0, (x,t) \in \partial\Omega(\varepsilon)\times\mathbb{R}, \quad (1)$$

(см., например, [2]). Комплексным преобразованием Фурье $\mathfrak{F}_{t\to\tau}$ задача (1) сводится к семейству эллиптических задач

$$(A(D_x) + \tau)\mathbf{u}(\cdot,\tau,\varepsilon) = \mathbf{f}(\cdot,\tau) \text{ в } \Omega(\varepsilon);\quad \Gamma\mathbf{u}(\cdot,\tau,\varepsilon) = 0 \text{ на } \partial\Omega(\varepsilon), \quad (2)$$

зависящих от параметра $\tau = \sigma - i\gamma$, где $\sigma \in \mathbb{R}$ и $\gamma = \text{const} > 0$. Поведение $\mathbf{u}(\cdot,\tau,\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ описывается методом составных разложенией [3]; асимптотика составляется из решений предельных задач, не зависящих от ε. Первая предельная задача - это задача в области $\Omega = \Omega(\varepsilon) \cup \overline{\omega(\varepsilon)}$, а вторая предельная задача - это задача во внешности отверстия $\omega(1)$ фиксированного диаметра.

Для возвращения к гиперболической задаче (1) требуется равномерная по τ оценка остатка в асимптотике $\mathbf{u}(\cdot,\tau,\varepsilon)$. Для этого необходимы равномерные по τ асимптотики решений первой и второй предельных задач в окрестностях нуля и бесконечности, соответственно. Оператор второй предельной задачи не зависит от τ. С другой стороны, оператор первой предельной задачи существенно зависит от τ. Этот оператор не является эллиптическим с учетом параметра τ (в смысле Аграновича-Вишика, см. [4]), поэтому эллиптическая оценка во всей области Ω решения $\mathbf{v_0}(\cdot,\tau)$ этой задачи и его первых производных не будет равномерной по τ.

Метод, пригодный для вывода равномерной по τ асимптотики решения $\mathbf{v_0}(\cdot,\tau)$, развит в работах [5–8] для нестационарных задач в областях с коническими точками и ребрами. В окрестности точки $x = 0$, имеющей диаметр порядка $|\tau|^{-1}$ ("эллиптической зоне"), выводится эллиптическая оценка решения $\mathbf{v_0}(\cdot, \tau)$ и его первых производных. Такая оценка позволяет описать поведение $\mathbf{v_0}(\cdot, \tau)$ в эллиптической зоне. В оставшейся части области Ω используется глобальная оценка решения по L_2-норме. Эти две оценки склеиваются в промежуточной зоне и дают "комбинированную" оценку, равномерную по параметру τ. С помощью последней оценки исследуется асимптотика $\mathbf{v_0}(\cdot, \tau)$ вблизи точки $x = 0$.

При $\varepsilon|\tau| \geq \mathrm{const}$ эллиптическая зона находится внутри малого отверстия $\omega(\varepsilon)$, поэтому в асимптотике решения первой предельной задачи нельзя перейти к следу на $\partial\omega(\varepsilon)$. Другими словами, при больших τ нельзя описать поведение невязки от решения первой предельной задачи в граничном условии на $\partial\omega(\varepsilon)$. Это значит, что при $\varepsilon|\tau| \geq \mathrm{const}$ (иначе говоря, для описания поведения волн, длина которых меньше, чем диаметр малого отверстия) метод составных разложений неприменим. Поэтому на правую часть $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ задачи (1) накладывается условие гладкости по времени, благодаря которому вклад коротких волн оказывается пренебрежимо малым при $\varepsilon \to 0$. При сделанных предположениях удается получить равномерную по τ оценку остатка в асимптотике решения $\mathbf{u}(\cdot, \tau, \varepsilon)$. Обратное преобразование Фурье доставляет асимптотику решения $\boldsymbol{\mathcal{U}}(\cdot, \cdot, \varepsilon)$ задачи (1). На последнем шаге из результатов, полученных для задачи (1), извлекаются все необходимые сведенья об асимптотике решений исходной нерасширенной системы Максвелла при $\varepsilon \to 0$.

По-видимому, система Максвелла в области $\Omega(\varepsilon)$ ранее не изучалась даже в стационарном варианте. В представленной работе такое исследование проводится при изучении задачи (2). Для этой задачи выведены и обоснованы полные асимптотические разложения решений при $\varepsilon \to 0$. Несмотря на то, что в работе $\mathrm{Im}\,\tau = -\gamma < 0$, полученные для стационарной задачи результаты справедливы при любых τ, окрестность которых при малых $\varepsilon > 0$ свободна от собственных значений системы Максвелла.

В настоящее время готовится к представлению кандидатская диссертация "Асимптотика решений динамических краевых задач в сингулярно возмущенных областях". Основные результаты по теме диссертации изложены в статьях [1, 9].

II. Публикации.

[1] *Кориков Д.В., Пламеневский Б.А.* Асимптотика решений стационарной и нестационарной систем Максвелла в области с малыми отверстиями // Алгебра и анализ **28** (2016), №4, 102-170.

II. Участие в конференциях и научных школах.

Основные результаты работы [1] докладывались и обсуждались на научном семинаре кафедры Высшей математики и математической физики, на общегородском семинаре по математической физике им. В. И. Смирнова, а также на восьмой Санкт-Петербургской конференции по спектральной теории, посвященной памяти М.Ш. Бирмана.

IV. Педагогическая деятельность.

Педагогической деятельностью не занимался.

Список литературы

[1] Кориков Д.В., Пламеневский Б.А. *Асимптотика решений стационарной и нестационарной систем Максвелла в области с малыми отверстиями*, Алгебра и анализ **28** (2016), №4, 102-170.

[2] Гудович И.С., Крейн С.Г., Куликов И.М., *Краевые задачи для уравнений Максвелла*, Докл. АН СССР 207 (1972), №2, 321–324.

[3] Maz'ya V.G., Nazarov S.A., Plamenevskii B.A., *Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains*, v. 1, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 2000.

[4] Агранович М. С., Вишик М.И., *Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида*, УМН, **19**:3(117) (1964), 53-161.

[5] Пламеневский Б.А., *О задаче Дирихле для волнового уравнения в цилиндре с ребрами*, Алгебра и анализ **10** (1998), №2, 197–228. (Поправка к ст.: **10** (1998), №3, 224).

[6] Кокотов А.Ю., Пламеневский Б.А., *Об асимптотике решений задачи Неймана для гиперболических систем в областях с коническими точками*, Алгебра и анализ **16** (2004), №3, 56–98.

[7] Матюкевич С.И., *О нестационарной системе Максвелла в областях с ребрами*, Алгебра и анализ **15** (2003), №6, 86–140.

[8] Матюкевич С.И., Пламеневский Б.А., *О динамических задачах теории упругости в областях с ребрами*, Алгебра и анализ **18** (2006), №3, 158–233.

[9] Кориков Д.В. *Асимптотика решений волнового уравнения в области с малым отверстием*, Алгебра и анализ **26** (2014), №5, 164-200.