Отчет по гранту фонда "Династия" за 2017 год.

Д.В. Кориков.

Результаты, полученные в этом году. Исследована система уравнений Максвелла в ограниченной области $\Omega(\varepsilon)$ с конечным числом полостей, диаметры которых пропорциональны малому параметру ε. Область $\Omega(\varepsilon)$ является сингулярно возмущенной[1]: при $\varepsilon \to 0$ она переходит в ограниченную область с выколотыми точками. На границе $\partial\Omega(\varepsilon)$ заданы условия идеальной проводимости. Выведены и обоснованы асимптотики собственных значений $\lambda(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$. Статья [iii] с подробным изложением результатов исследования подготовлена и отправлена в редакцию журнала.

Рассмотренная модель описывает поведение электромагнитного поля в плазме, заключенной в проводящий резонатор и загрязненной частицами металла малых размеров. Такая плазма возникает при различного рода эмиссионных процессах. Полученные результаты описывают сдвиг резонансной частоты в присутствии загрязнения. Отметим, что хотя электрическая и магнитная проницаемости в работе выбраны единичными, методика применима и для случая переменных проницаемостей.

В случае области $\Omega(\varepsilon)$ с единственной полостью $\omega(\varepsilon)$, $\omega(0) = \{0\}$ результаты таковы:

I. Любой компакт, свободный от нуля и спектра системы Максвелла в области $\Omega := \Omega(\varepsilon) \cup \overline{\omega(\varepsilon)}$, при малых ε свободен и от спектра системы Максвелла в области $\Omega(\varepsilon)$. Окрестность нуля при малых ε содержит единственное собственное число $\lambda(\varepsilon) = 0$ кратности 1.

II. Пусть $\lambda_0 \neq 0$ – собственное значение оператора Максвелла в области Ω кратности $m(\lambda_0)$. Тогда при малых ε в окрестности λ_0 расположены в точности $m(\lambda_0)$ собственных чисел $\lambda_j(\varepsilon)$ системы Максвелла в области $\Omega(\varepsilon)$.

III. Для упомянутых в пункте II собственных чисел $\lambda_j(\varepsilon)$ справедливы асимптотики

$$\lambda_j(\varepsilon) = \lambda_{j,0} + \lambda_{j,3}\varepsilon^3 + \lambda_{j,4}\varepsilon^4 + O(\varepsilon^{5-\delta}), \quad \varepsilon \to 0;$$

где $\delta > 0$ может быть сколь угодно малым.

IV. В случае $m(\lambda_0) = 1$ для единственного собственного значения $\lambda(\varepsilon)$, лежащего в окрестности λ_0, и отвечающей ему собственной функции $\mathbf{u}(\cdot,\varepsilon) = (u^1(\cdot,\varepsilon), u^2(\cdot,\varepsilon))^T$ найдены полные асимптотические разложения

$$\lambda(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\simeq} \lambda_0 + \sum_{k=3}^{\infty} \lambda_k \varepsilon^k; \quad \mathbf{u}(x,\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\simeq} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \big(\mathbf{v}_k(x) + \chi(x)\mathbf{w}_k(\varepsilon^{-1}x)\big).$$

Здесь $\chi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\chi = 1$ вблизи нуля, $\mathbf{v}_k \in C^\infty(\overline{\Omega}; \mathbb{C}^6)$, $\mathbf{w}_k \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \backslash \omega(1); \mathbb{C}^6)$. Остаток $\mathbf{u}(\cdot,\varepsilon)$ оценивается по норме в $H^1(\Omega(\varepsilon))$.

Поясним метод, применяемый в работе. Система уравнений Максвелла переопределена (8 уравнений на 6 неизвестных), поэтому сначала добавлением двух неизвестных функций эта система расширяется до эллиптической краевой задачи

$$A(D_x)\mathbf{u} = \lambda(\varepsilon)\mathbf{u} \text{ в } \Omega(\varepsilon); \quad \Gamma\mathbf{u} = 0 \text{ на } \partial\Omega(\varepsilon) \tag{1}$$

[1]Зависящая от малого параметра ε область называется сингулярно возмущенной, если в пределе $\varepsilon = 0$ у нее появляются особенности границы (выколотые точки, углы, конические точки, ребра).

(см., например, [1]). Затем исследуется асимптотика собственных значений расширенной задачи, из которой впоследствии извлекается информация о поведении собственных чисел нерасширенной системы Максвелла. Важную роль в выводе асимптотики играют так называемые предельные задачи. Первая предельная задача в области $\Omega := \Omega(0) \cup \{0\}$ получается из исходной "заклеиванием" полости $\omega(\varepsilon)$. Ко второй предельной задаче в области $\mathbb{R}^3 \backslash \omega(1)$ приводит замена переменной $x \to \xi := \varepsilon^{-1}x$ и предельный переход при $\varepsilon \to 0$, при котором внешняя граница области $\Omega(\varepsilon)$ уходит на бесконечность, а спектральный параметр исчезает. С помощью предельных задач выводится неравенство

$$\dim \ker \mathcal{A}_0(\lambda_0) \le \mathfrak{m}(\Sigma, \lambda_0) \le \dim \ker \mathcal{A}_0(\lambda_0) + \dim \ker \mathcal{B}_0, \tag{2}$$

справедливое при малых ε. Здесь λ_0 – спектральный параметр, $\mathcal{A}_0(\lambda_0)$ – оператор первой предельной задачи, $\mathfrak{m}(\Sigma, \lambda_0)$ – суммарная кратность всех собственных значений задачи (1), расположенных в окрестности точки λ_0. Через $\mathcal{B}_0$ обозначен оператор второй предельной задачи. Отметим, что неравенство (2) в более простой ситуации ($\dim \ker \mathcal{B}_0 = 0$) появляется в работах [2]–[4] для операторов Лапласа и Ламе. В случае оператора Максвелла $\dim \ker \mathcal{B}_0 = 1$ и (2) принимает вид

$$\dim \ker \mathcal{A}_0(\lambda_0) \le \mathfrak{m}(\Sigma, \lambda_0) \le \dim \ker \mathcal{A}_0(\lambda_0) + 1.$$

Равенство $\mathfrak{m}(\Sigma, \lambda_0) = \dim \ker \mathcal{A}_0(\lambda_0) + 1$ достигается при $\lambda_0 = 0$. Это связано с тем, что вклад в кратность собственного значения $\lambda(\varepsilon) = 0$ дают ядра операторов и первой и второй предельных задач. Затем выводится равномерная по ε оценка $H^1(\Omega(\varepsilon))$-нормы решения $\mathbf{u}$ через $L_2(\Omega(\varepsilon))$-нормы правой части $(A(D) - \lambda)\mathbf{u}$ и проекций $\mathbf{u}$ на подпространства сужений функций из $\ker \mathcal{A}_0(\lambda)$ и $\ker \mathcal{B}_0 \mathcal{X}_\varepsilon$ на область $\Omega(\varepsilon)$. Через $\mathcal{X}_\varepsilon$ обозначен оператор $\mathcal{X}_\varepsilon \mathbf{w}(\xi) := \mathbf{w}(\varepsilon\xi)$. С помощью упомянутой оценки доказывается равенство $\mathfrak{m}(\Sigma, \lambda_0) = \dim \ker \mathcal{A}_0(\lambda_0)$ при $\lambda_0 \neq 0$, эквивалентное утверждениям I и II. Затем методом составных разложений (см., например, [4]) выводятся асимптотики собственных значений задачи (1). Собственные значения нерасширенной системы Максвелла образуют подмножество спектра задачи (1), поэтому из полученных асимптотик вытекают утверждения III, IV.

Поданные в печать работы:

[iii] *Кориков Д.В.* Асимптотика собственных значений системы Максвелла в области с малыми полостями. // 41 стр.

Доклады, сделанные в этом году. 2 марта состоялась защита кандидатской диссертации "Асимптотика решений динамических краевых задач в сингулярно возмущенных областях". По итогам защиты 12 июля присуждена степень кандидата физико-математических наук (приказ №740/нк-35).

Педагогическая деятельность в этом году. С 1 сентября работаю старшим преподавателем на кафедре математики Санкт-Петербургского государственного университета телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича (СПбГУТ).

Краткая характеристика результатов, полученных за 3 года. В проекте получены следующие результаты:

- Исследована стационарная система Максвелла в области $\Omega(\varepsilon)$. На границе $\partial\Omega(\varepsilon)$ заданы условия идеальной проводимости либо импедансные граничные условия. Спектральный параметр в задаче принадлежит полуплоскости $\mathrm{Im}\,\lambda > 0$. Выведены и обоснованы полные асимптотические разложения решений при $\varepsilon \to 0$. Результаты исследования опубликованы в статье [ii].

- Исследована нестационарная система Максвелла в области $\Omega(\varepsilon)$. На границе $\partial\Omega(\varepsilon)$ заданы условия идеальной проводимости либо импедансные граничные условия. Выведены и обоснованы полные асимптотические разложения решений при $\varepsilon \to 0$. Время t в задаче пробегает всю вещественную ось, однако результаты естественно обобщаются на случай начально-краевой задачи на временном интервале $t \in (0, T)$. Результаты исследования опубликованы в статье [ii].

- Исследована асимптотика собственных значений системы Максвелла в области $\Omega(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$. На границе $\partial\Omega(\varepsilon)$ заданы условия идеальной проводимости. Статья [iii] с подробным изложением результатов отправлена в редакцию журнала. При помощи оценок, полученных в [iii], результаты работы [ii] для стационарной системы Максвелла в области $\Omega(\varepsilon)$ обобщаются на случай любых значений спектрального параметра, не совпадающих с нулем и собственными числами системы Максвелла в области Ω.

Проект продолжает исследование динамических краевых задач в сингулярно возмущенных областях, начатое в работе автора [i]. Методика, предложенная в [i] для волнового уравнения, применена для исследования технически значительно более сложной задачи – системы Максвелла. По результатам работ [i] и [ii] защищена кандидатская диссертация "Асимптотика решений динамических краевых задач в сингулярно возмущенных областях".

Развитая в работах [ii] и [iii] модель описывает электромагнитный резонатор, который заполнен загрязненной микрочастицами металла плазмой. Поэтому полученные в проекте результаты могут найти применение для диагностики плазмы – определения степени загрязненности плазмы микрочастицами по сдвигам резонансных частот.

Отметим, что в проекте также получены результаты для динамической системы Ламе в области $\Omega(\varepsilon)$. Публикация этих результатов была отложена в пользу изучения асимптотики собственных значений системы Максвелла в связи с открывшимися возможными приложениями в диагностике плазмы.

Список литературы

[i] Кориков Д.В. *Асимптотика решений волнового уравнения в области с малым отверстием*, Алгебра и анализ **26** (2014), №5, 164-200.

[ii] Кориков Д.В., Пламеневский Б.А. *Асимптотика решений стационарной и нестационарной систем Максвелла в области с малыми отверстиями,* Алгебра и анализ **28** (2016), №4, 102-170.

[1] Гудович И.С., Крейн С.Г., Куликов И.М. *Краевые задачи для уравнений Максвелла*, Докл. АН СССР 207 (1972), № 2, 321–324.

[2] Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А., *Асимптотические разложения собственных чисел краевых задач для оператора Лапласа в областях с малыми отверстиями*, Изв. АН СССР. Сер. матем., 1984, т. 48, №2, 347–371.

[3] Назаров С. А., *Двучленная асимптотика решений спектральных задач с сингулярными возмущениями*, Матем. сб., 1990, 181, №3, 291–320.

[4] Maz'ya V.G., Nazarov S.A., Plamenevskii B.A., *Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains*, v. 1, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 2000.