Список публикаций грантополучателя фонда "Династия" Коробкова Михаила Вячеславовича (за три последних года)

2017 г.

[1] Hajlasz P., Korobkov M.V., Kristensen J. (2017): A bridge between Dubovitskii-Federer theorems and the coarea formula // Journal of Functional Analisis, V.272, no. 3, P.1265–1295. http://dx.doi.org/10.1016/j.jfa.2016.10.031

Abstract. В представленной совместной работе получены новые результаты, которые подводят итог исследованиям последних лет по теореме Морса-Сарда для соболевских функций. Именно, показано, что для k-дифференцируемых (по Соболеву) функций f из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^d$ при любом $q > m-1$ пересечение q-почти всех множеств уровня функции f с m-критическим множеством имеет s_q-меру ноль, где $s_q = n - m - k + 1 + k(m-q)$ (это значение точное - неулучшаемое).

Таким образом, найдена своеобразная "теорема-мостик которая вбирает в себя многие классические результаты (саму теорему Морса–Сарда, обобщающие ее теоремы Федерера и Дубовицкого) как частные случаи. Одним из своих концов (при $q = m-1$) этот "мостик"упирается в другой интересный феномен, формулу коплощади, многомерный аналог которой также установлен в представленной работе [1]. Утверждения, заключающиеся в этой "теореме-мостике являются новыми даже в гладком случае (к примеру, та же формула коплощади ранее была известна только при очень жестких ограничениях на размерность), хотя в статье они устанавливаются сразу для соболевского случая с наименьшем показателем суммируемости (гарантирующем лишь непрерывность отображения).

[2] Korobkov M.V., Pileckas K. and Russo R. (2017): The existence theorem for the steady Navier–Stokes problem in exterior axially symmetric 3D domains // Math. Ann. (Online first 2017), http://dx.doi.org/10.1007/s00208-017-1555-x

Abstract. We study the nonhomogeneous boundary value problem for the Navier–Stokes equations of steady motion of a viscous incompressible fluid in a three-dimensional exterior (i.e., unbounded) domain with multiply connected boundary. We prove that this problem has a solution for axially symmetric domains and data (without any smallness restrictions on the fluxes). Our main tool is a recent version of the Morse–Sard theorem for Sobolev functions obtained by Bourgain et al. (Rev Mat Iberoam 29(1):1–23, 2013).

[3] Korobkov M.V. and Kristensen J. (2017): The Trace Theorem, the Luzin N- and Morse–Sard properties for the sharp case of Sobolev–Lorentz mappings // Journal of Geometric Analysis, (Online first 2017), http://dx.doi.org/10.1007/s12220-017-9936-7

We prove Luzin N- and Morse–Sard properties for mappings $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ of the Sobolev–Lorentz class $W^k_{p,1}$, $p = \frac{n}{k}$ (this is the sharp case that guaranties the continuity of mappings). Our main tool is a new trace theorem for Riesz potentials of Lorentz functions for the limiting case "$q = p$". Using these results, we find also some very natural approximation and differentiability properties for functions in $W^k_{p,1}$ with exceptional set of small Hausdorff content.

2016 г.

[4] Korobkov M.V., Tsai T.-P., Forward Self-Similar Solutions of the Navier-Stokes Equations in the Half Space // *Analysis and PDE*, Vol. 9 (2016), No. 8, 1811-1827, http://dx.doi.org/10.2140/apde.2016.9.1811

Abstract. Для системы уравнений Навье-Стокса несжимаемой жидкости в трехмерном полупространстве доказано существование прямых (по времени) автомодельных (=самоподобных) решений для сколь угодно больших самоподобных исходных данных. (Решение уравнений Н.-С. называется самоподобным, если выполняется тождество $u(x,t) = su(sx, s^2t)$ для всех положительных параметров s.) Данный результат является дополнением классической теоремы Нечаса, Ружички и Шверака [Necas J., Ruzicka M., Sverak V., On Leray's self-similar solutions of the Navier- Stokes equations // Acta Math. 176 (1996), 283-294] о НЕсуществовании обратных по времени самоподобных решений системы Н.-С. Для доказательства применяются методы "от противного которые недавно помогли решить проблему Лерэ о существовании решений краевой задачи для стационарной системы уравнений Н.-С. (см. статью [Korobkov M.V., Pileckas K., Russo R., Solution of Leray's problem for stationary Navier-Stokes equations in plane and axially symmetric spatial domains // Ann. of Math., 181, No. 2 (2015), 769-807. http://dx.doi.org/10.4007/annals.2015.181.2.7]).

[5] Kopylov, A.P., Korobkov M.V. Rigidity Conditions for the Boundaries of Submanifolds in a Riemannian Manifold // *Журнал СФУ. Математика и физика.* 2016, T.9, No.3, Электронная публикация. http://dx.doi.org/10.17516/1997-1397-2016-9-3-320-331

[6] Korobkov M.V., Pileckas K., Russo R. (2016): Leray's Problem on Existence of Steady State Solutions for the Navier-Stokes Flow // in "Handbook of Mathematical Analysis in Mechanics Springer International Publishing AG, Y. Giga, A. Novotny (eds.), P.1-50, http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-10151-4_5-1

Abstract. This is a survey of results on the Leray problem (1933) for the nonhomogeneous boundary value problem for the steady Navier-Stokes equations in a bounded domain with multiple boundary components. The boundary conditions are assumed only to satisfy the necessary requirement of zero total flux. The authors have proved that the problem is solvable in arbitrary bounded planar or threedimensional axially symmetric domains. The proof uses Bernoulli's law for weak solutions of the Euler equations and a generalization of the Morse-Sard theorem for functions in Sobolev spaces. Similar existence results (without any restrictions on fluxes) are proved for steady Navier-Stokes system in two- and three-dimensional exterior domains with multiply connected boundary under assumptions of axial symmetry. In particular, it was shown that in domains with two axes of symmetry and for symmetric boundary datum, the two-dimensional exterior problem has a symmetric solution vanishing at infinity.

2015 г.

[7] Bourgain J., Korobkov M. V., Kristensen J. (2015): On the Morse–Sard property and level sets of Wn,1 Sobolev functions on Rn, Journal fur die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal), 2015, No. 700, 93–112.
http://dx.doi.org/10.1515/crelle-2013-0002

[8] M.V. Korobkov, K. Pileckas and R. Russo (2015): Solution of Leray's problem for stationary Navier-Stokes equations in plane and axially symmetric spatial domains, Annals of Math., 181, no. 2, 769-807. http://dx.doi.org/10.4007/annals.2015.181.2.7

[9] M.V. Korobkov, K. Pileckas and R. Russo (2015): An existence theorem for steady Navier–Stokes equations in the axially symmetric case, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5), 14, No. 1 (2015), 233–262. http://dx.doi.org/10.2422/2036-2145.201204_003

[10] Kopylov A.P., Korobkov M.V. (2015): On properties of the intrinsic geometry of submanifolds in a Riemannian manifold, Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis, Vol. 31, No. 1, pp. 71–80.
http://www.emis.de/journals/AMAPN/vol31_1/31_08.pdf

О полученных за отчетный период результатах

For the last three years we made almost comprehensive study of the very interesting phenomena connected to the classical Morse–Sard theorem on zero measure of critical values of smooth mappings.

The classical Morse–Sard theorem claims that for a mapping $v\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ of class C^k the measure of critical values $v(Z_{v,m})$ is zero under condition $k > \max(n-m, 0)$. Here the critical set, or m-critical set is defined as $Z_{v,m} = \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{rank}\nabla v(x) < m\}$. Further Dubovitskiĭ in 1957 and independently Federer and Dubovitskiĭ in 1967 found some elegant extensions of this theorem to the case of other (e.g., lower) smoothness assumptions. They also established the sharpness of their results within the C^k category.

In our joint papers we proved a *bridge theorem* that includes all the above results as particular cases. Namely, if a function $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ belongs to the Holder class $C^{k,\alpha}$, $0 \le \alpha \le 1$, then for every $q > m-1$ the identity

$$\mathcal{H}^{\mu}(Z_{v,m} \cap v^{-1}(y)) = 0$$

holds for $\mathcal{H}^q$-almost all $y \in \mathbb{R}^d$, where

$$\mu = n - m + 1 - (k+\alpha)(q-m+1).$$

Intuitively, the sense of this bridge theorem is very close to *Heisenberg's uncertainty principle* in theoretical physics: the more precise is the information we receive on measure of the image of the critical set, the less precisely the preimages are described, and vice versa.

The result is new even for the classical C^k-case (when $\alpha = 0$); similar result is established for the Sobolev classes of mappings $W^k_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d)$ with minimal integrability assumptions $p = \max(1, n/k)$, i.e., it guarantees in general only *the continuity* (not everywhere differentiability) of a mapping. However, using some N-properties for Sobolev mappings, established in our previous paper, we obtained that the sets of nondifferentiability points of Sobolev mappings are fortunately negligible in the above bridge theorem. We cover also the case of fractional Sobolev spaces. As a limiting case in this bridge theorem (for $q = m - 1$) we also establish a new coarea type formula.

The proofs of the most results are based on our previous joint papers with J. Kristensen and J. Bourgain (2013, 2015). We also crucially use very deep Y. Yomdin's entropy estimates of near critical values for polynomials (based on algebraic geometry tools).

These results helped for the solution of the so-called Leray's problem in mathematical fluid mechanics. The problem remained open for more than 80 years (starting from the publication of the famous paper by Jean Leray 1933). Namely, for plane and axially symmetric spatial flows the existence theorem was proved [7] for boundary value problem of stationary Navier-Stokes equations in bounded domains under necessary and sufficient condition of zero total flux (see also [2] for the case of exterior (unbounded) domains).

More precisely, for a smooth bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, consider the steady Navier-Stokes system

$$\begin{cases} \nu\Delta\mathbf{u} - \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} - \nabla p = \mathbf{0} & \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{a} & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.1}$$

where $\mathbf{a}$ is an assigned vector field (boundary value) on $\partial\Omega$. The continuity equation (0.1_2) implies the evident compatibility condition

$$\int\limits_{\partial\Omega} \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\,ds = 0 \tag{0.2}$$

necessary for the solvability of problem (0.1), where $\mathbf{n}$ is a unit outward normal vector to $\partial\Omega$. Condition (0.2) means that the total flux of the fluid through $\partial\Omega$ is zero.

In his famous paper of 1933 [Etude de diverses equations integrales non lineaire et de quelques problemes que pose l'hydrodynamique, J. Math. Pures Appl. 12 (1933), 1–82] Jean Leray proved that problem (0.1) has a solution provided

$$\int\limits_{\Gamma_j} \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\,ds = 0, \qquad \forall j = 1, \dots, N, \tag{0.3}$$

where Γ_j are the connected components of the boundary $\partial\Omega = \bigcup\limits_{j=1}^{N} \Gamma_j$ (that means that the flow has neither sinks nor sources).

The case when the boundary value $\mathbf{a}$ satisfies only the necessary condition (0.2) was left open by Leray, and the problem whether (0.1)–(0.2) admit (or do not admit) a solution is known in the scientific community as *Leray's problem.*

We proved (see above the joint papers with R.Russo and K.Pileckas) that indeed the necessary condition (0.2) is also sufficient for the plane case and for the $3D$-spatial axially symmetric case.

Further we consider the similar problem in the exterior (unbounded) domain with additional condition

$$\mathbf{u}(x) \to \mathbf{u}_0 \qquad \text{as } \ |x| \to \infty \tag{0.4}$$

at infinity, where $\mathbf{u}_0$ is the prescribed constant vector.

In the paper [2, KPR2017] we proved that this problem has a solution **without** any restrictions on boundary fluxes (i.e., for *arbitrary* sufficiently regular boundary data $\mathbf{a}$) for $3D$-spatial axially symmetric case. We proved also the similar existence result for axially symmetric plane exterior domains (with axially symmetric boundary data). But it is interesting, that the problem for general $2D$-plane exterior domain is still open: the difficulties are connected with the absence of the Sobolev Imbedding Theorem $H^1(\mathbb{R}^2) \to L^q(\mathbb{R}^2)$ for the functions with finite Dirichlet integrals $\int\limits_{\mathbb{R}^2} |\nabla f|^2 < \infty$.

The last results for the boundary value problem for the stationary Navier–Stokes system in two dimensional exterior domain were obtained in our very recent preprint [KPR2017 // arXiv:1711.02400]. We proved that, surprisingly, any solution of this problem with finite Dirichlet integral is uniformly bounded (in usual C–norm). Also we proved the existence theorem under zero total flux assumption.

Участие в конференциях

2016 г.

- Международная конференция <44-я Зимняя Школа по Абстрактному Анализу>

- Чехия, Швратка, 16-23 января 2016.

- Коробков М.В., серия лекций (приглашенных пленарных докладов), сайт http://www.karlin.mff.cuni.cz/ lhota/History.php

- Международная конференция Russian-French Workshop "Mathematical Hydrodynamics"

- Новосибирск, 22-27 августа 2016 г.

- Коробков М.В., приглашенный пленарный доклад, http://conf.nsc.ru/mathhydro/en/info_letter

- Международная конференция <Дни геометрии в Новосибирске 2016"

- Новосибирск, 21-24 сентября 2016 г.

- Коробков М.В., приглашенный пленарный доклад, http://math.nsc.ru/conference/geomtop/2016/program.html

- Международная конференция <Новый тенденции в теоретической и математической физике>

- Москва, в Математическом Институте им. В.А. Стеклова РАН, с 3 по 7 октября 2016

- Коробков М.В., приглашенный пленарный доклад, сайт http://newtrends.mi.ras.ru/

2017 г.

-Summer Symposium in Real Analysis, XLI Black Squirrel Symposium, Wooster

- Wooster-колледж, США, 18-24 июня 2017.
- 63 участника
- Коробков М.В., серия из 3-х лекций (приглашенных пленарных докладов), сайт www.wooster.edu/academics/areas/mathematics/raex2017/

- Международная конференция "The last 60 years of Mathematical Fluid Mechanics: Longstanding Problems and New Perspectives In Honor of Professors Robert Finn and Vsevolod Solonnikov
- Вильнюс, Литва, 21-25 августа 2017 г.
- 47 участников
- Коробков М.В., приглашенный пленарный доклад, http://mfm2017.com/

- Международная конференция "Математика в современном мире посвященная 60-летию Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН
- 14-19 августа 2017, Новосибирск, Россия
- более двухсот участников
- Коробков М.В., секционный доклад, http://www.math.nsc.ru/conference/sobolev/readings/2017/

- Всероссийская конференция с международным участием "Современные проблемы механики континуума и физика взрыва"посвященная 60-летию Институт гидродинамики им. М.А.Лаврентьева СО РАН,
- 4-8 сентября 2017.
- 320 участников.
- Коробков М.В., секционный доклад, http://conf.nsc.ru/participationlist/hydro60

Педагогическая деятельность

В 2015 гг. и 2016 гг. М.В. Коробков читал лекции по математическому анализу для студентов первого–второго курсов механико-математического факультета Новосибирского госуниверситета. В 2017 г. М.В. Коробков читал лекции по векторным топологическим пространствам и теории распределений (обобщенных функций) для студентов четвертого курса ММФ НГУ.