Список публикаций грантополучателя фонда "Династия" Коробкова Михаила Вячеславовича

[1] Korobkov M.V., Tsai T.-P., Forward Self-Similar Solutions of the Navier-Stokes Equations in the Half Space // *Analysis and PDE*, Vol. 9 (2016), No. 8, 1811-1827, http://dx.doi.org/10.2140/apde.2016.9.1811

Abstract. Для системы уравнений Навье-Стокса несжимаемой жидкости в трехмерном полупространстве доказано существование прямых (по времени) автомодельных (=самоподобных) решений для сколь угодно больших самоподобных исходных данных. (Решение уравнений Н.-С. называется самоподобным, если выполняется тождество $u(x,t) = su(sx, s^2 t)$ для всех положительных параметров s.) Данный результат является дополнением классической теоремы Нечаса, Ружички и Шверака [Necas J., Ruzicka M., Sverak V., On Leray's self-similar solutions of the Navier- Stokes equations // Acta Math. 176 (1996), 283-294] о НЕсуществовании обратных по времени самоподобных решений системы Н.-С. Для доказательства применяются методы "от противного", которые недавно помогли решить проблему Лерэ о существовании решений краевой задачи для стационарной системы уравнений Н.-С. (см. статью [Korobkov M.V., Pileckas K., Russo R., Solution of Leray's problem for stationary Navier-Stokes equations in plane and axially symmetric spatial domains // Ann. of Math., 181, No. 2 (2015), 769-807. http://dx.doi.org/10.4007/annals.2015.181.2.7]).

[2] Korobkov M.V., Kristensen J., Hajlasz P., A bridge between Dubovitskii-Federer theorems and the coarea formula // *Journal of Finctional Analisis*, Online first (2016), http://dx.doi.org/10.1016/j.jfa.2016.10.031

Abstract. В представленной совместной работе [2] получены новые результаты, которые подводят итог исследованиям последних лет по теореме Морса-Сарда для соболевских функций. Именно, показано, что для k-дифференцируемых (по Соболеву) функций f из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^d$ при любом $q > m-1$ пересечение q-почти всех множеств уровня функции f с m-критическим множеством имеет s_q-меру ноль, где $s_q = n - m - k + 1 + k(m-q)$ (это значение точное - неулучшаемое).

Таким образом, найдена своеобразная "теорема-мостик", которая вбирает в себя многие классические результаты (саму теорему Морса–Сарда, обобщающие ее теоремы Федерера и Дубовицкого) как частные случаи. Одним из своих концов (при $q = m-1$) этот "мостик"упирается в другой интересный феномен, формулу коплощади, многомерный аналог которой также установлен в представленной работе [2]. Утверждения, заключающиеся в этой "теореме-мостике", являются новыми даже в гладком случае (к примеру, та же формула коплощади ранее была известна только при очень жестких ограничениях на размерность), хотя в статье они устанавливаются сразу для соболевского случая с наименьшем показателем суммируемости (гарантирующем лишь непрерывность отображения).

[3] Kopylov, A.P., Korobkov M.V. Rigidity Conditions for the Boundaries of Submanifolds in a Riemannian Manifold // *Журнал СФУ. Математика и физика.* 2016, Т.9, No.3, Электронная публикация. http://dx.doi.org/10.17516/1997-1397-2016-9-3-320-331

Abstract. В процессе развития идей академика А. Д. Александрова первым автором был предложен следующий подход к изучению проблем жесткости для краёв C0-подмногообразий в некотором гладком римановом многообразии. Пусть Y1 представляет собой двумерное компактное связное C0- подмногообразие с непустым краем в некотором гладком двумерном римановом многообразии (X,g) без края. Рассмотрим внутреннюю метрику (инфимум длин путей, соединяющих данную пару точек) внутренности Int Y1 многообразия Y1 и продолжим ее по непрерывности (операцией lim) на краевые точки Y1. В настоящей статье рассматривается вопрос о жесткости, т.е. когда указанная метрика определяет край Y1 с точностью до изометрии в объемлющем пространстве (X, g). Рассматривается также случай dim Yj = dim X = n, n > 2. Ключевые слова: риманово многообразие, внутренняя метрика, индуцированная метрика на крае, строгая выпуклость многообразия, геодезические, условия жесткости.

[4] Korobkov M.V., Pileckas K., Russo R., Leray's Problem on Existence of Steady State Solutions for the Navier-Stokes Flow, in "Handbook of Mathematical Analysis in Mechanics of Viscous Fluids", Springer, 2017, to appear.

Abstract. This is a survey of results on the Leray problem (1933) for the nonhomogeneous boundary value problem for the steady Navier-Stokes equations in a bounded domain with multiple boundary components. The boundary conditions are assumed only to satisfy the necessary requirement of zero total flux. The authors have proved that the problem is solvable in arbitrary bounded planar or threedimensional axially symmetric domains. The proof uses Bernoulli's law for weak solutions of the Euler equations and a generalization of the Morse-Sard theorem for functions in Sobolev spaces. Similar existence results (without any restrictions on fluxes) are proved for steady Navier-Stokes system in two- and three-dimensional exterior domains with multiply connected boundary under assumptions of axial symmetry. In particular, it was shown that in domains with two axes of symmetry and for symmetric boundary datum, the two-dimensional exterior problem has a symmetric solution vanishing at infinity.

[5] Korobkov M. V. and Kristensen J., The trace theorem, the Luzin N- and Morse–Sard properties for the sharp case of Sobolev–Lorentz mappings, *Report no. OxPDE-15/07*, https://www.maths.ox.ac.uk/system/files/attachments/OxPDE%2015.07.pdf

Abstract. We prove Luzin N- and Morse–Sard properties for mappings $v\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ of the Sobolev–Lorentz class $\mathrm{W}^k_{p,1}$, $p = \frac{n}{k}$ (this is the sharp case that guaranties the continuity of mappings). Our main tool is a new trace theorem for Riesz potentials of Lorentz functions for the limiting case $q = p$. Using these results, we find also some very natural approximation and differentiability properties for functions in $\mathrm{W}^k_{p,1}$ with exceptional set of small Hausdorff content.

О полученных за отчетный период результатах

За указанный период опубликовано и принято к печати четыре статьи, пятая работа в списке является препринтом (послано в Journal of Geometric Analysis, работа в стадии рецензирования). Одной из наиболее важных представляется работа [2], обсуждаемая ниже.

The Morse–Sard theorem requires that a mapping $v\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ is of class C^k, $k > \max(n-m, 0)$. In 1957 Dubovitskiĭ generalized this result by proving that almost all level sets for a C^k mapping has $\mathcal{H}^s$-negligible intersection with its critical set, where $s = \max(n-m-k+1, 0)$. Here the critical set, or m-critical set is defined as $Z_{v,m} = \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{rank}\nabla v(x) < m\}$. Another generalization was obtained independently by Dubovitskiĭ and Federer in 1966, namely for C^k mappings $v\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ and integers $m \le d$ they proved that the set of m–critical values $v(Z_{v,m})$ is $\mathcal{H}^{q_\circ}$-negligible for $q_\circ = m - 1 + \frac{n-m+1}{k}$. They also established the sharpness of these results within the C^k category.

Here in [2] we prove that Dubovitskiĭ's theorem can be generalized to the case of continuous mappings of the Sobolev–Lorentz class $\mathrm{W}^k_{p,1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d)$, $p = \frac{n}{k}$ (this is the minimal integrability assumption that guarantees the continuity of mappings). In this situation the mappings need not to be everywhere differentiable and in order to handle the set of nondifferentiability points, we establish for such mappings an analog of the Luzin N–property with respect to lower dimensional Hausdorff content. Finally, we formulate and prove a *bridge theorem* that includes all the above results as particular cases.

Theorem 0.1. *$k, m \in \{1, \dots, n\}$, $d \ge m$ and $v \in \mathrm{W}^k_{p_\circ,1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d)$. Then for any $q \in (m-1, \infty)$ the equality*

$$\mathcal{H}^{\mu_q}(Z_{v,m} \cap v^{-1}(y)) = 0 \qquad \text{for } \mathcal{H}^q\text{-a.a. } y \in \mathbb{R}^d \tag{0.1}$$

holds, where

$$\mu_q := s + k(m-q), \qquad s = n - m - k + 1, \tag{0.2}$$

and $Z_{v,m}$ again denotes the set of m-critical points of v: $Z_{v,m} = \{x \in \mathbb{R}^n \setminus A_v : \operatorname{rank}\nabla v(x) \le m-1\}$.

Let us note, that the behavior of the function μ_q is very natural:

$$\begin{aligned}
\mu_q &= 0 \text{ for } q = q_\circ = m - 1 + \frac{n-m+1}{k} \quad \text{(Dubovitskiĭ–Federer Theorem)} \\
\mu_q &< 0 \text{ for } q > q_\circ \quad \text{[ibid.]} \\
\mu_q &= s \text{ for } q = m \quad \text{(Dubovitskiĭ Theorem)} \\
\mu_q &= n - m + 1 \text{ for } q = m - 1.
\end{aligned} \tag{0.3}$$

The last value cannot be improved in view of the trivial example of a linear mapping $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ of rank $m-1$. But instead of zero measure properties, for this limiting case in the bridge theorem we also establish a new coarea type formula: if $E \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{rank}\nabla v(x) \le m\}$, then

$$\int\limits_E J_m v(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathcal{H}^{n-m}(E \cap v^{-1}(y))\,\mathrm{d}\mathcal{H}^m(y).$$

The mapping v is $\mathbb{R}^d$–valued, with arbitrary d, and the formula is obtained without any restrictions on the image $v(\mathbb{R}^n)$ (such as m-rectifiability or σ-finiteness with respect to the m-Hausdorff measure). These results are new also for smooth mappings, but are presented here in the general Sobolev context.

The proofs of the results are based on our previous joint papers with J. Bourgain (2013, 2015).

Участие в конференциях

- Международная конференция <44-я Зимняя Школа по Абстрактному Анализу>
- Чехия, Шври
- Коробков М.В., серия лекций (приглашенных пленарных докладов), сайт http://www.karlin.mff.cuni.cz/ lhota/History.php

- Международная конференция Russian-French Workshop "Mathematical Hydrodynamics"
- Новосибирск, 22-27 августа 2016 г.
- Коробков М.В., приглашенный пленарный доклад, http://conf.nsc.ru/mathhydro/en/info_letter

- Международная конференция <Дни геометрии в Новосибирске 2016"
- Новосибирск, 21-24 сентября 2016 г.
- Коробков М.В., приглашенный пленарный доклад, http://math.nsc.ru/conference/geomtop/2016/program.html

- Международная конференция <Новый тенденции в теоретической и математической физике>
- Москва, в Математическом Институте им. В.А. Стеклова РАН, с 3 по 7 октября 2016
- Коробков М.В., приглашенный пленарный доклад, сайт http://newtrends.mi.ras.ru/

Педагогическая деятельность

В минувшем году М.В. Коробков читал лекции по математическому и функциональному анализу для студентов второго и четвертого курсов механико-математического факультета Новосибирского госуниверситета.