# Отчет о научной и педагогической деятельности по гранту фонда «Династия» за 2017 год

Косаревская Екатерина Сергеевна

## Результаты, полученные в этом году

Исследовался класс моделей системы обслуживания, имеющей бесконечный ресурс, через которую проходит пуассоновский поток независимых заявок. Математическую модель системы обслуживания можно упрощенно описать следующим образом. Работа системы состоит из независимых между собой процессов. Обслуживание процесса начинается в некоторый момент $s$, длится $u$ единиц времени и влечет расход ресурса $r$. Время начала, длительность и расход ресурса — случайные величины. Объектом изучения является суммарная нагрузка на систему, которая выражается в терминах интеграла по пуассоновской мере.

Была рассмотрена модель системы обслуживания, в которой интенсивность потока системы обслуживания не является постоянной.

Были доказаны теоремы:

**Теорема 1.** *Пусть длительность процесса обслуживания $U$ имеет плотность $p(u)$ такую, что $p(u) \sim \frac{c_U}{u^{1+\rho}}$, $u \to \infty$, а расход ресурса $R = R_* \cdot U^{\varkappa}$, где $\delta = \frac{\gamma-1}{\varkappa}$, и $\mathbb{E}R_*^{\delta} < \infty$, причем $1 + \beta < \rho < 1 + \delta\beta$, $\delta = 2$, и выполнено условие высокой интенсивности обслуживания $\frac{\lambda}{a^{\rho-1}} \to \infty$, а нормировка $b = Ba\lambda^{\frac{\beta}{\rho-1}}$.*

*Тогда при $a \to \infty$ процесс $Z_a(t)$ сходится к случайной прямой $t \cdot \mathcal{S}(1, 0, \frac{\rho-1}{\beta})$, где $\mathcal{S}(1, 0, \frac{\rho-1}{\beta})$ — односторонняя строго $\frac{\rho-1}{\beta}$-устойчивая случайная величина.*

**Теорема 2.** *Пусть $\mathbb{P}(UR > x) \sim \frac{C}{\delta x^{\delta}}, x \to \infty, 1 < \alpha < 2$ и $a \to \infty, a\lambda \to \infty$, и для некоторого $2 > \gamma \geqslant \delta$ выполняется $\mathbb{E}\left(U\mathbb{1}_{\{R>t,U>h\}}\right) \leqslant \frac{C_1}{t^{\delta}h^{\gamma+1}} \forall t > 0, h > 0$.*

*Тогда при $a \to \infty$ процесс $Z_a(t)$ сходится в смысле конечномерных распределений к процессу $\mathcal{Y}(t)$, где $\mathcal{Y}(t)$ — спектрально положительный строго $\delta$-устойчивый процесс Леви; $\mathcal{Y}(1) \stackrel{d}{=} \mathcal{S}(1, 0, \delta)$.*

**Теорема 3.** *Пусть $1 < \gamma < \delta < 2$, система работает в режиме малых вкладов*

$$I = a^{\gamma-1}\mathbb{E}\left(UR^{\delta}\mathbb{1}_{\{U>ah\}}\mathbb{1}_{\{R>\varepsilon(\lambda/a^{\gamma-1})^{\frac{1}{\delta}}\}}\right) \to 0 \qquad \forall\varepsilon > 0,\ h > 0.$$

*Также пусть для любого $h > 0$ верно $\mathbb{E}(U^{\beta(\delta-\gamma)+1}R^{\gamma}\mathbb{1}_{\{U>h\}}) < \infty$ и $\mathbb{E}(U^{\delta(\beta+1)-\beta\delta}R^{\gamma}\mathbb{1}_{\{U>h\}}) < \infty$.*

*Тогда при $a \to \infty$, $\lambda a \to \infty$ процесс $Z_a(t)$ сходится к процессу $Z_{\gamma,\delta}(t)$, где процесс $Z_{\gamma,\delta}(t)$ — телеком-процесс:*

$$Z_{\gamma,\delta}(t) = \iint \ell_t(s,u)dX(s,u).$$

*В этом выражении $X$ — $\delta$-устойчивая случайная мера с интенсивностью $u^{\beta(\delta-\gamma)}r^{\gamma}dsdP_{UR}$, отвечающая центрированному одностороннему устойчивому распределению $\mathcal{S}(1,0,\delta)$.*

## Педагогическая деятельность

| | |
|---|---|
| Осень 2016/2017 | Преподаватель на **Кафедре математических и информационных технологий СПбАУ РАН**<br>Теория вероятностей |
| Осень 2016/2017 | Преподаватель в **гимназии №330 СПб**<br>Дополнительные занятия по математике |

## Итоги 2015–2017

Исследовалась следующая модель. Положим $\mathcal{R} = (s,u,r) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Каждая точка $(s,u,r)$ имеет смысл процесса обслуживания, который начинается в момент $s$, длится $u$ единиц времени и расходует $r$ единиц ресурса, *причем мы не накладываем ограничений на зависимость длительности и расхода.* Одновременно могут выполняться несколько процессов обслуживания (без ограничения на суммарный расход ресурса, т.е. нагрузку на систему).

Исходными параметрами для описания работы системы являются

- $\lambda > 0$ — интенсивность потока процессов обслуживания;
- $P_{UR}(u,r)$ — совместное распределение длительности обслуживания и расхода ресурса.

Определим на $\mathcal{R}$ меру интенсивности $\mu(ds,du,dr) = \lambda\, ds\, dP_{UR}(u,r)$. Пусть $N$ — соответствующая ей случайная мера Пуассона (подробнее о случайных пуассоновских мерах и интегралах по ним см., например, [?]). Реализации $N$ (случайные множества троек) можно рассматривать как возможные траектории работы системы, а все характеристики этой работы выражаются в виде соответствующих интегралов.

Интерес представляет изучение суммарной нагрузки на систему

$$W^*(t) = \int_{\mathcal{R}} r \cdot |[s, s+u] \cap [0,t]| \, dN$$

при условии $\mathbb{E}(UR) < \infty$.

Получение предельных теорем возможно для процесса $Z_a(t) = \frac{W^*(at) - \mathbb{E}W*(at)}{b}$ (то есть для нормированного и центрированного процесса суммарной нагрузки).

Зоны действия предельных теорем определяются режимами работы системы.

В заявке был представлен следующий план исследований:

1. В первую очередь я планирую получить предельные теоремы в нерассмотренной ранее зоне. Для этого я рассмотрю еще несколько частных случаев. После этого я планирую обобщить полученные в частных случаях предельные теоремы на случай произвольных длительности обслуживания и расхода ресурса.

2. Рассмотреть случай сходимости к дробному броуновскому движению с индексом $H = 1$.

3. Обобщить модель системы обслуживания, рассмотрев не обязательно постоянную интенсивность потока системы обслуживания.

Поскольку поставленная задача сводится к рассмотрению и классификации всех возможных предельных результатов, будет удобно рассмотреть их на схеме (Рис. 1) для частного случая (длительность процесса обслуживания $U$ имеет плотность $p(u)$ такую, что $p(u) \sim \frac{c_U}{u^{1+\rho}}$, $u \to \infty$, а расход ресурса $R = R_* \cdot U^\beta$, где $\mathbb{P}(R_* > x) \sim \frac{C}{\delta x^\delta}$):

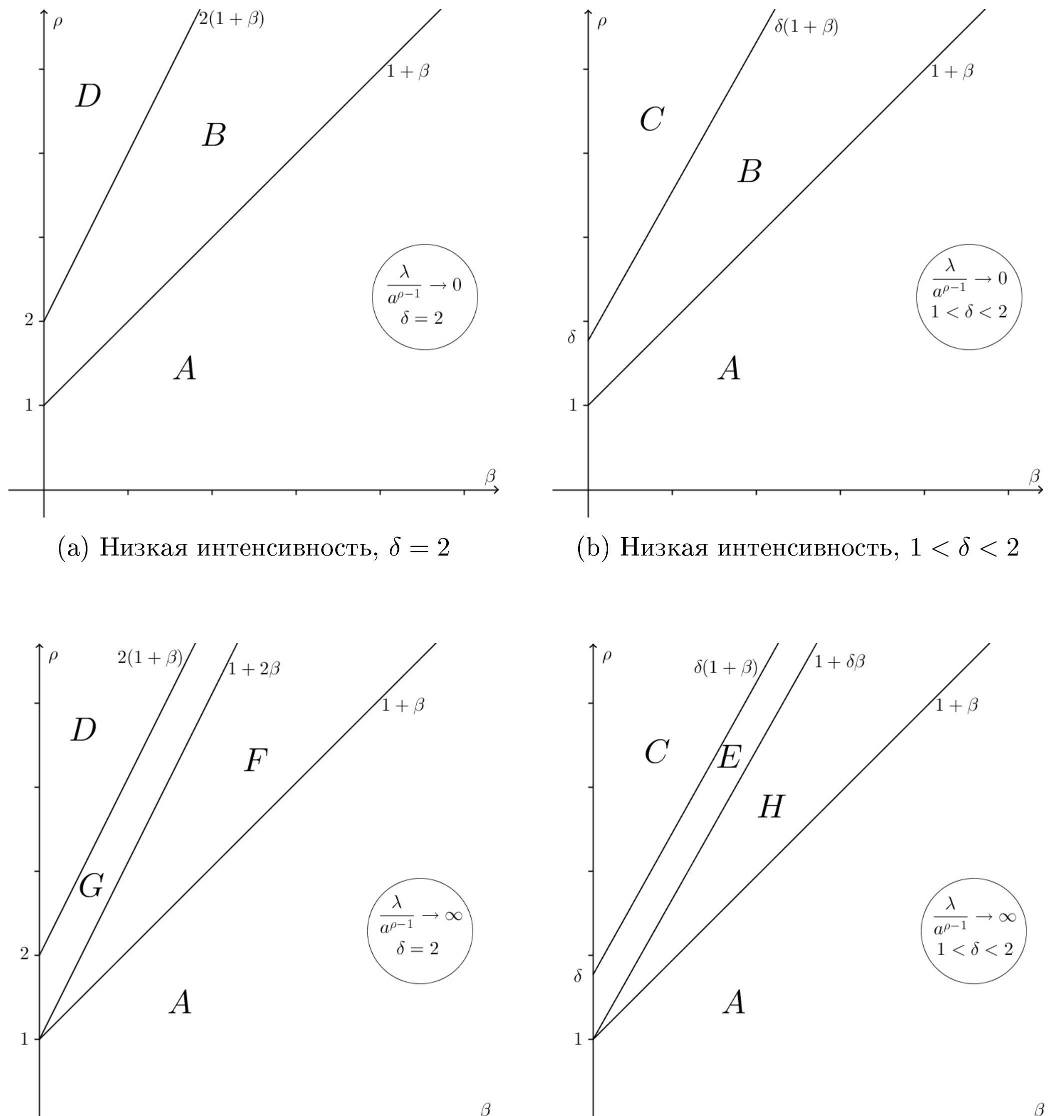
Ранее были получены результаты для произвольного распределения $(U, R)$, являющиеся в данном примере предельными теоремами для зон D на Рис. 1c и Рис. 1a (сходимость к винеровскому процессу), зоны G на Рис. 1c (сходимость к дробному броуновскому движению) и, наконец, зоны B на Рис. 1a и Рис. 1b и C на Рис. 1b (сходимость к одностороннему $\delta$-устойчивому процессу Леви). В зоне A на всех четырех рисунках осмысленные результаты отсутствуют.

Таким образом, оставалось рассмотреть зону F на Рис. 1c и зоны C, E, H на Рис. 1d, после чего обобщить полученные результаты.

В частном случае были получены результаты для всех зон, кроме H. Обобщить удалось зоны C и E (Теоремы 2 и 3).

Случай сходимости к дробному броуновскому движению с индексом H=1, как оказалось, в частном случае имеет место только в зоне F, сходимость была доказана (см. Теорему 1), однако обобщить результат далее на данный момент не удалось.

И, наконец, случай, в котором поток системы обслуживания имеет не обязательно постоянную интенсивность, также был рассмотрен. Условие, при котором заявки




(a) Низкая интенсивность, $\delta = 2$

(b) Низкая интенсивность, $1 < \delta < 2$

(c) Высокая интенсивность, $\delta = 2$

(d) Высокая интенсивность, $1 < \delta < 2$

Рис. 1: Диаграмма предельных теорем для случая $R = U^\beta R_*$

приходят с разной интенсивностью для разных моментов времени, оправданно практически, однако оно не обогащает описываемую модель, поскольку требует лишь соответствующего масштабирования оси времени.

Таким образом, заявленные результаты были достигнуты частично.