ИТОГОВЫЙ ОТЧЕТ

по гранту фонда „Династия“ для молодых математиков за 2016–2017 г.

Юлия Мешкова

(*Санкт-Петербургский государственный университет*)

y.meshkova@spbu.ru

Проект относится к теории усреднения (гомогенизации) периодических дифференциальных операторов (ДО). Теория усреднения изучает поведение решений дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими периодическими коэффициентами (зависящими от $\mathbf{x}/\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — малый параметр). Классический результат теории усреднения — сходимость решений задачи с быстро осциллирующими коэффициентами к решению эффективной задачи с постоянными коэффициентами при $\varepsilon \to 0$. Это означает, что в пределе малого периода сильно неоднородная среда ведет себя как однородная *эффективная* среда. Нас интересуют операторные оценки погрешности в теории усреднения. Это результаты о сходимости соответствующих разрешающих операторов (резольвенты в эллиптическом случае и операторной экспоненты — в параболическом) по операторной норме. Интерес к оценкам такого рода возник после появления серии работ М. Ш. Бирмана и Т. А. Суслиной, разработавших теоретико-операторный (спектральный) подход к задачам усреднения. Настоящее исследование опирается на этот подход.

1. Результаты, полученные в этом году

Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ — решетка, Ω — ячейка решетки Γ. Для Γ-периодических функций f используем обозначение $f^\varepsilon(\mathbf{x}) := f(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$, $\varepsilon > 0$. Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей класса $C^{1,1}$. В пространстве $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ рассматривается матричный эллиптический дифференциальный оператор $B_{\flat,\varepsilon}$, $\flat = D, N$, второго порядка, заданный выражением

$$b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) + \sum_{j=1}^{d} \left(a_j^\varepsilon(\mathbf{x}) D_j + D_j a_j^\varepsilon(\mathbf{x})^*\right) + Q^\varepsilon(\mathbf{x}) \tag{1}$$

при условии Дирихле ($\flat = D$) либо Неймана ($\flat = N$) на границе. Коэффициенты g, a_j, Q периодичны относительно решетки Γ. Матрица коэффициентов $g(\mathbf{x})$ размера $m \times m$ ограничена и положительно определена. Оператор $b(\mathbf{D})$ имеет вид $b(\mathbf{D}) = \sum_{j=1}^d b_j D_j$ (где b_j — постоянные $(m\times n)$-матрицы), причем $m \geqslant n$ и $\operatorname{rank} b(\boldsymbol{\xi}) = n$ при $0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$ для случая условия Дирихле или при $0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{C}^d$ для условия Неймана. Матричные коэффициенты a_j и $Q = Q^*$ принадлежат подходящим $L_p(\Omega)$-классам. При сделанных предположениях операторы $B_{D,\varepsilon}$ и $B_{N,\varepsilon}$ сильно эллиптичны. Предполагается, что $B_{\flat,\varepsilon} > 0$, $\flat = D, N$.

Нас интересует поведение при малом ε обобщенной резольвенты $(B_{\flat,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$, где $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$. Здесь $Q_0(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая ограниченная и положительно определенная матрица.

Теорема 1. *Пусть $\zeta = |\zeta| e^{i\phi} \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$. При достаточно малом ε справедливы аппроксимации*

$$\|(B_{\flat,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_\flat^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_1(\phi)\varepsilon|\zeta|^{-1/2}, \tag{2}$$

$$\|(B_{\flat,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_\flat^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K_\flat(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant C_2(\phi)\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + C_3(\phi)\varepsilon, \tag{3}$$

$\flat = D, N$. Здесь $B_\flat^0$ — соответствующий эффективный оператор с постоянными коэффициентами, $\overline{Q_0} = |\Omega|^{-1} \int_\Omega Q_0(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$. Оператор $K_\flat(\varepsilon;\zeta)$ — корректор. Он содержит быстро осциллирующие множители и потому зависит от ε. При этом $\|K_\flat(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2\to H^1} = O(\varepsilon^{-1})$ для фиксированного ζ и $\varepsilon \to 0$. Величины $C_1(\phi)$, $C_2(\phi)$ и $C_3(\phi)$ допускают контроль через данные задачи и $\phi = \arg\zeta$. Оценки (2), (3) равномерны по углу ϕ в любой области вида $\{\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+ : |\zeta| \geqslant 1, \phi_0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi - \phi_0\}$, $\phi_0 > 0$. Т. е. в этой области $C_j(\phi) \leqslant C_j(\phi_0)$, $j = 1, 2, 3$.

Результаты подобного сорта принято называть операторными оценками погрешности в теории усреднения. При фиксированном ζ оценка (2) имеет точный порядок $O(\varepsilon)$. Порядок оценки (3) хуже из-за влияния границы области. Кроме результатов теоремы 1, справедливых при $|\zeta| \geqslant 1$, получены также оценки в более широкой области изменения параметра ζ, имеющие другое поведение относительно ζ. Результаты применяются к усреднению решений эллиптических систем.

Метод доказательства основан на использовании результатов усреднения для оператора вида (1), действующего во всем пространстве $\mathbb{R}^d$, введении поправки типа пограничного слоя и тщательного анализа этой поправки. Важную техническую роль играет использование Сглаживания по Стеклову (заимствованное из работ В. В. Жикова и С. Е. Пастуховой) и оценки интегральных функционалов по ε-окрестности границы.

В случае краевого условия Дирихле оценки вида (2), (3) были получены в прошлом году в [MSu2]. В 2017 г. в [MSu5] эти оценки были усилены относительно поведения величин $C(\phi)$ при малых ϕ (либо $2\pi - \phi$). Результат кратко анонсирован в [MSu3].

Получение двухпараметрических (относительно ε и ζ) оценок было мотивировано применением к параболическим задачам. Справедливо тождество

$$e^{-B_{\flat,\varepsilon} t} = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{-\zeta t}(B_{\flat,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}\, d\zeta,$$

где $\gamma \subset \mathbb{C}$ — контур, обходящий спектр оператора $B_{\flat,\varepsilon}$ в положительном направлении. Для экспоненты от эффективного оператора имеет место аналогичное равенство. С помощью этих тождеств из теоремы 1 выводится следующий результат.

Теорема 2. *При достаточно малом ε справедливы аппроксимации*

$$\|e^{-B_{\flat,\varepsilon} t} - e^{-B_\flat^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_4 \varepsilon (t + \varepsilon^2)^{-1/2} e^{-C_5 t}, \quad t \geqslant 0,$$
$$\|e^{-B_{\flat,\varepsilon} t} - e^{-B_\flat^0 t} - \varepsilon \mathcal{K}_\flat(\varepsilon; t)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant C_6 \left(\varepsilon^{1/2} t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1}\right) e^{-C_5 t}, \quad t > 0,$$

$\flat = D, N$. Здесь $\mathcal{K}_\flat(\varepsilon; t)$ — корректор.

Для оператора с условием Дирихле результат теоремы 2 кратко анонсирован в [MSu3]. Полное доказательство изложено в [MSu4].

Для случая краевого условия Неймана результаты пока не опубликованы, авторы работают над подготовкой статьи.

2. Сравнение достигнутых результатов с заявкой

За 3 года планировалось изучить усреднение эллиптических и параболических систем для оператора вида (1) в ограниченной области при условиях Дирихле и Неймана на границе. Для этого предполагалось сначала изучить усреднение резольвенты оператора B_ε вида (1), действующего в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Также планировалось заняться усреднением эллиптических и параболических систем для несамосопряженных операторов с самосопряженной старшей частью, действующих в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$.

Грант был выделен на 2 года. Исследование усреднения оператора $(B_\varepsilon-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$, действующего в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ было проведено до того, как проект получил поддержку, см. [MSu1]. Усреднение эллиптических и параболических систем в ограниченной области при краевом условии Дирихле либо Неймана было проведено в полном объеме. Результаты в случае условия Дирихле опубликованы, см. [MSu3, MSu4], в случае условия Неймана готовится публикация. Несамосопряженные операторы не изучались. (Существенные продвижения в несамосопряженном случае получены Н. Н. Сеником, победителем конкурса „Молодая математика России“ 2015 года.)

3. Опубликованные и поданные в печать работы

Опубликованы работы [MSu3, MSu4]. Подготовлен препринт [MSu5], представляющий собой сильно переработанную версию препринта [MSu2] из отчета за прошлый год. Работа [MSu5] представлена в журнал „Asymptotic Analysis."

4. Участие в конференциях и школах, доклады на научных семинарах

Были сделаны доклады на следующих школах, конференциях и научных семинарах:

1. Рождественские встречи с Пьером Делинем (НМУ, Москва, Россия, 4–6 января 2017).

2. International conference on partial differential equations - Silkroad Mathematics Center series international conferences (Beijing, China, 10–21 April 2017). (Poster talk.)

3. Международная конференция „Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis VII“(Ростов-на-Дону, Россия, 23–28 апреля 2017).

4. Séminaire d'Analyse Numérique et Calcul Scientifique, Laboratoire de Mathématiques de Besançon (LMB), Besançon, France, 4 May 2017.

5. Международная конференция „Days on Diffraction 2017“(Санкт-Петербург, Россия, 19–23 июня 2017).

6. Международная конференция по математической теории управления и механике, секция памяти В. В. Жикова (Суздаль, Россия, 7–11 июля 2017).

7. The 8th International Conference on Differential and Functional Differential Equations (Москва, Россия, 13–20 августа 2017).

8. Insubria Summer School in Mathematical Physics "Spectral and scattering theory: from self-adjoint operators to boundary value problems"(University of Insubria, Como, Italy, 18–22 September 2017). (Poster talk.)

9. Международная конференция „XXVII Крымская Математическая Школа-Симпозиум по спектральным и эволюционным задачам“(Батилиман (Ласпи), Россия, 17 – 29 сентября 2017).

10. Workshop "Homogenization Theory and Applications (HomTAp)" (WIAS, Berlin, Germany, 4–6 October 2017).

11. Mathematical Physics and Harmonic Analysis Seminar, Texas A&M University, College Station, Texas, USA, 27 October 2017.

12. Texas Analysis and Mathematical Physics Symposium 2017 (The University of Texas at Austin, Austin, Texas, USA, 3–5 November 2017).

13. Семинар кафедры высшей математики и математической физики физического факультета Санкт-Петербургского государственного университета; ПОМИ, Санкт-Петербург, Россия, 29 ноября 2017.

Планируется доклад на Санкт-Петербургской зимней молодежной конференции по теории вероятностей и математической физике (ПОМИ, Санкт-Петербург, Россия, 19–21 декабря 2017).

Также участвовала без доклада в двух научных школах:

- Summer School and Workshop "Harmonic Analysis, Spectral Theory and PDE's" (Rome SAPIENZA, Roma, Italy, 12–15 September 2017).
- PDE/Analysis Mini-school (The University of North Carolina at Chapel Hill, Chapel Hill, North Carolina, USA, 9–10 November 2017).

5. Работа в научных центрах

Инженер-исследователь в лаборатории имени П. Л. Чебышева, математико-механический факультет, Санкт-Петербургский государственный университет.

6. Педагогическая деятельность

Педагогической деятельностью не занималась.

Список литературы

[MSu1] Meshkova Yu. M., Suslina T. A., *Two-parametric error estimates in homogenization of second order elliptic systems in* $\mathbb{R}^d$, Applicable Analysis **95**:7 (2016), 1413–1448.

[MSu2] Мешкова Ю. М., Суслина Т. А., *Усреднение решений задачи Дирихле для эллиптических систем: двухпараметрические оценки погрешности*, препринт С.-Петербургского математического общества 2016-10 (2016).

[MSu3] Мешкова Ю. М., Суслина Т. А., *Усреднение задачи Дирихле для эллиптических и параболических систем с периодическими коэффициентами*, Функц. анализ и его прил., **51**:3 (2017), 87–93 (in Russian); English transl.: Functional Analysis and Its Applications, **51**:3 (2017), 230–235.

[MSu4] Мешкова Ю. М., Суслина Т. А., *Усреднение первой начально-краевой задачи для параболических систем: операторные оценки погрешности*, Алгебра и анализ, **29**:6 (2017), 99–158 (in Russian); English transl.: St. Petersburg Mathematical Journal, **29**:6 (2018), to appear.

[MSu5] Meshkova Yu. M., Suslina T. A., *Homogenization of the Dirichlet problem for elliptic systems: Two-parametric error estimates*, arXiv:1702.00550 (2017).