Отчет А.Е. Миронова за 2015 год

1. Полученные результаты.

1. Найдены спектральные данные для одноточечных коммутирующих разностных операторов ранга один. Коэффициенты таких операторов зависят от одного функционального параметра, а операторы сдвига входят в разностные операторы только с положительными степенями. Эти операторы подробно изучены в случае гиперэллиптических спектральных кривых, когда выделенная точка совпадает с точкой ветвления. Построены примеры операторов с полиномиальными и тригонометрическими коэффициентами. Операторы с полиномиальными коэффициентами вложены в дифференциальные операторы с полиномиальными коэффициентами. Эта конструкция дает новый способ построения коммутативных подалгебр в первой алгебре Вейля (результаты получены совместно с Г.С. Маулешовой).

2. Исследовано действие автоморфизмов первой алгебры Вейля на множестве коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами, отвечающих гиперэллиптическим спектральным кривым. Совместно с А. Жегловым доказано, что существуют гиперэллиптические спектральные кривые с бесконечным множеством орбит.

1.1 Одноточечные коммутирующие разностные операторы ранга один.

Если два разностных оператора

$$L_k = \sum_{j=-K^-}^{K^+} u_j(n)T^j, \quad L_m = \sum_{j=-M^-}^{M^+} v_j(n)T^j, \quad n \in \mathbb{Z},$$

порядков k и m, где $k = K^- + K^+$, $m = M^- + M^+$, $K^\pm$, $M^\pm \geq 0$, коммутируют, то существует ненулевой полином $R(z, w)$ такой, что $R(L_k, L_m) = 0$ [1]. Полином R определяет *спектральную кривую* $\Gamma = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : R(z, w) = 0\}$. Если $L_k\psi = z\psi, \quad L_m\psi = w\psi$, то $P = (z, w) \in \Gamma$. *Рангом* l пары L_k, L_m называется размерность пространства совместных собственных функций $l = \dim\{\psi : L_k\psi = z\psi, \quad L_m\psi = w\psi\}$ для $P = (z, w) \in \Gamma$ в общем положении. Любое максимальное коммутативное кольцо разностных операторов изоморфно кольцу мероморфных функций на спектральной алгебраической кривой с s полюсами (см. [2]). Такие операторы называются s — *точечными.* Спектральные данные, по которым строятся собственные функции (*функции Бейкера – Ахиезера*) двухточечных операторов ранга один, найдены И.М. Кричевером [1]. Спектральные данные для одноточечных операторов ранга $l > 1$ получены И.М. Кричевером и С.П. Новиковым в [2]. В этой же работе найдены одноточечные операторы ранга два в случае эллиптических спектральных кривых. Одноточечные операторы ранга 2, отвечающие гиперэллиптическим спектральным кривым изучались в [3].

Сформулируем наши основные результаты.
Возьмем следующие спектральные данные

$$S = \{\Gamma, \gamma_1, \dots, \gamma_g, q, k^{-1}, P_n\},$$

где Γ — риманова поверхность рода g, $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_g$ — неспециальный дивизор на Γ, $q \in \Gamma$ — выделенная точка, k^{-1} — локальный параметр около q, $P_n \in \Gamma$ — набор точек, $n \in \mathbb{Z}$.

Теорема 1 *Существует единственная функция Бейкера – Ахиезера $\psi(n, P)$, $n \in \mathbb{Z}$, $P \in \Gamma$, которая обладает следующими свойствами.*
1. *Дивизор нулей и полюсов ψ имеет вид*

$$\gamma_1(n) + \ldots + \gamma_g(n) + P_1 + \ldots + P_n - \gamma_1 - \ldots - \gamma_g - nq,$$

если $n \geq 0$ и имеет вид

$$\gamma_1(n) + \ldots + \gamma_g(n) - P_{-1} - \ldots - P_n - \gamma_1 - \ldots - \gamma_g - nq,$$

если $n < 0$.
2. *В окрестности q функция ψ имеет разложение*

$$\psi = k^n + O(k^{n-1}).$$

Для любых мероморфных функций $f(P)$ и $g(P)$ на Γ с единственными полюсами порядков m и s в q с разложениями

$$f(P) = k^m + O(k^{m-1}), \quad g(P) = k^s + O(k^{s-1})$$

существуют единственные разностные операторы

$$L_m = T^m + u_{m-1}(n)T^{m-1} + \ldots + u_0(n),$$

$$L_s = T^s + v_{s-1}(n)T^{s-1} + \ldots + v_0(n)$$

такие, что

$$L_m\psi = f(P)\psi, \quad L_s\psi = g(P)\psi.$$

Операторы L_m, L_s коммутируют.

Замечание 1 *Спектральные данные, в которых появляется дополнительный набор точек P_n (аналогично нашей конструкции), рассматривались И.М. Кричевером [4] в случае двумерного дискретного оператора Шредингера.*

Отметим, что дивизор $\gamma_1(n) + \ldots + \gamma_g(n)$ определяется по спектральным данным однозначно. Отметим также, что в частном случае, когда все точки P_n совпадают, мы получаем двухточечные операторы Кричевера [1] ранга один.

Рассмотрим гиперэллиптическую спектральную кривую Γ, заданную уравнением

$$w^2 = F_g(z) = z^{2g+1} + c_{2g}z^{2g} + \ldots + c_0, \tag{1}$$

в качестве выделенной точки выберем $q = \infty$. Пусть $\psi(n, P)$ — соответствующая функция Бейкера – Ахиезера. Тогда существуют коммутирующие операторы L_2, L_{2g+1} такие, что

$$L_2\psi = ((T + U_n)^2 + W_n)\psi = z\psi, \quad L_{2g+1}\psi = w\psi.$$

Теорема 2 *Имеет место равенство*

$$L_2 - z = (T + U_n + U_{n+1} + \chi(n, P))(T - \chi(n, P)),$$

где

$$\chi = \frac{\psi(n+1, P)}{\psi(n, P)} = \frac{S_n}{Q_n} + \frac{w}{Q_n},$$

$$S_n(z) = -U_n z^g + \delta_{g-1}(n)z^{g-1} + \ldots + \delta_0(n), \quad Q_n = -\frac{S_{n-1} + S_n}{U_{n-1} + U_n}.$$

Функции U_n, W_n, S_n удовлетворяют уравнению

$$F_g(z) = S_n^2 + Q_n Q_{n+1}(z - U_n^2 - W_n)). \tag{2}$$

Уравнение (2) может быть линеаризовано.
Функции $S_n(z), U_n, W_n$ удовлетворяют уравнению

$$(S_n - S_{n+1})(U_n + U_{n+1}) - Q_n(z - U_n^2 - W_n) +$$

$$Q_{n+2}(z - U_{n+1}^2 - W_{n+1}) = 0.$$

Теорема 3 *В случае эллиптической спектральной кривой Γ, заданной уравнением*

$$w^2 = F_1(z) = z^3 + c_2z^2 + c_1z + c_0,$$

оператор $L_2 = (T + U_n)^2 + W_n$, где

$$U_n = -\frac{\sqrt{F_1(\gamma_n)} + \sqrt{F_1(\gamma_{n+1})}}{\gamma_n - \gamma_{n+1}}, \quad W_n = -c_2 - \gamma_n - \gamma_{n+1},$$

γ_n — произвольный функциональный параметр, коммутирует с некоторым оператором L_3.

Можно показать, что в случае гиперэллиптической спектральной кривой и выделенной точки $q = \infty$ операторы L_2, L_{2g+1} могут быть получены из одноточечных операторов Кричевера – Новикова ранга два (см. [2]). Продемонстрируем это при $g = 1$. При некоторых ограничениях на спектральные данные одноточечный оператор Кричевера – Новикова ранга два порядка 4 при $g = 1$ имеет вид (это легко следует из [3])

$$L_4 = (T + U_n + V_nT^{-1})^2 + W_n,$$

где

$$U_n = -\frac{\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}}{\gamma_n - \gamma_{n+1}}, \quad W_n = -c_2 - \gamma_n - \gamma_{n+1},$$

$$V_n = \frac{\varepsilon_n^2 - F_1(\gamma_n)}{(\gamma_n - \gamma_{n-1})(\gamma_{n+1} - \gamma_n)}.$$

Оператор L_4 коммутирует с некоторым оператором $L_6 = \sum_{j=-3}^{3} u_j(n)T^j$. Коэффициенты операторов L_4 и L_6 выражаются через два функциональных параметра γ_n, ε_n. Если положить $\varepsilon_n = \sqrt{F_1(\gamma_n)}$, то мы получаем операторы из теоремы 3.

Теорема 2 позволяет строить явные примеры.

Теорема 4 *Оператор*

$$L_2=(T+r_1\cos(n))^2+\frac{1}{2}r_1^2\sec^2(g+\frac{1}{2})\sin(g)\sin(g+1)\cos(2n),$$

$r_1\neq 0$ *коммутирует с оператором* L_{2g+1} *порядка* $2g+1$.

Теорема 5 *Оператор*

$$L_2=(T+\alpha_2n^2+\alpha_0)^2-g(g+1)\alpha_2^2n^2, \quad \alpha_2\neq 0$$

коммутирует с оператором L_{2g+1} *порядка* $2g+1$.

Замечание 2 *Можно непосредственно проверить, что при* $g=1,\dots,5$ *оператор*

$$L_2=(T+\alpha_2n^2+\alpha_1n+\alpha_0)^2-g(g+1)\alpha_2n(\alpha_2n+\alpha_1),\ \alpha_2\neq 0$$

коммутирует с L_{2g+1}. *По–видимому, это верно для любого* g.

Так как

$$[T,n]=T, \qquad [x,(-x\partial_x)]=x,$$

то замена $T\to x,\ n\to(-x\partial_x)$ в операторах

$$L_2=(T+\alpha_2n^2+\alpha_1n+\alpha_0)^2-g(g+1)\alpha_2n(\alpha_2n+\alpha_1)$$

и L_{2g+1} дает пару коммутирующих дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами, при этом оператору L_2 соответствует оператор

$$(x+\alpha_2(x\partial_x)^2-\alpha_1(x\partial_x)+\alpha_0)^2-g(g+1)\alpha_2(x\partial_x)(\alpha_2(x\partial_x)-\alpha_1).$$

Таким образом мы получаем коммутативную подалгебру в первой алгебре Вейля $A_1=\mathbb{C}[x][\partial_x]$. Алгебра A_1 обладает следующими автоморфизмами $\varphi_j:A_1\to A_1,\ j=1,2,3$

$$\varphi_1(x)=\alpha x+\beta\partial_x,\ \varphi_1(\partial_x)=\gamma x+\delta\partial_x,\ \alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{C},\ \alpha\delta-\beta\gamma=1,$$

$$\varphi_2(x)=x+P_1(\partial_x), \quad \varphi_2(\partial_x)=\partial_x,$$

$$\varphi_3(x)=x, \quad \varphi_3(\partial_x)=\partial_x+P_2(x),$$

где P_1,P_2 — произвольные полиномы. Диксмье [5] доказал, что группа автоморфизмов $Aut(A_1)$ порождается автоморфизмами вида φ_j. Если к

$x, -x\partial_x \in A_1$ применить $\varphi \in Aut(A_1)$, то мы получим элементы $A = \varphi(x)$, $B = \varphi(-x\partial_x)$, которые удовлетворяют уравнению $[A, B] = A$. Если заменить $T \to A$, $n \to B$ в L_2 и L_{2g+1}, то мы получим коммутирующие элементы в A_1. Таким образом возникает следующая важная задача. Описать решения уравнения

$$[A, B] = A, \quad A, B \in A_1$$

с точностью до действия автоморфизмов $Aut(A_1)$. Каждое такое решение позволяет строить по коммутирующим элементам в кольце разностных операторов с полиномиальными коэффициентами $W_1 = \mathbb{C}[n][T]$ коммутирующие элементы в A_1. Как нам сообщил П.С. Колесников группа автоморфизмов $Aut(W_1)$ порождается элементами вида $\varphi : W_1 \to W_1$,

$$\varphi(T) = T, \qquad \varphi(n) = n + P(T),$$

где P — полином. Таким образом с помощью $Aut(W_1)$ и $Aut(A_1)$ мы можем получать из коммутирующих разностных операторов коммутирующие дифференциальные операторы, причем с одной и той же спектральной кривой. Интересной задачей является задача описания всех коммутирующих операторов с полиномиальными коэффициентами с фиксированной спектральной кривой, которые могут быть получены из коммутирующих разностных операторов с помощью указанной процедуры. Этот круг вопросов связан с гипотезой Диксмье, о которой пойдет речь далее.

[1]. *Кричевер И.М.* // УМН. 1978. Т. 33. В. 4 (202). С. 215–216.

[2]. *Кричевер И.М., Новиков С.П.* // УМН. 2003. Т. 58. В. 3 (351). С. 51–88.

[3]. *Маулешова Г.С., Миронов А.Е.* // УМН. 2015. Т. 70. В. 3 (423). С. 181–182.

[4]. *Кричевер И.М.* // Докл. АН СССР. 1985. Т. 285. В. 1. С. 31–36.

[5]. *Dixmier J.* // Bull. Soc. Math. France, 1968. V. 96. P. 209–242.

1.2 Коммутирующие обыкновенные дифференциальные операторы с полиномиальными коэффициентами и автоморфизмы первой алгебры Вейля.

Группа автоморфизмов первой алгебры Вейля $A_1 = \{\sum_{j=0}^n u_j(x)\partial_x^j, u_j \in \mathbb{C}[x]\}$ действует на множестве решений уравнения

$$f(X,Y) = \sum_{j,i=0}^{n} \alpha_{ij} X^i Y^j = 0, \quad X,Y \in A_1, \alpha_{ij} \in \mathbb{C}, \tag{3}$$

т.е., если $X,Y \in A_1$ удовлетворяют (3) и $\varphi \in Aut(A_1)$, то $\varphi(X), \varphi(Y)$ также удовлетворяют (3). Как уже упоминалось выше, группа $Aut(A_1)$ порождается следующими автоморфизмами

$$\varphi_1(x) = \alpha x + \beta\partial_x, \quad \varphi_1(\partial_x) = \gamma x + \delta\partial_x, \quad \alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{C}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

$$\varphi_2(x) = x + P_1(\partial_x), \quad \varphi_2(\partial_x) = \partial_x,$$
$$\varphi_3(x) = x, \quad \varphi_2(\partial_x) = \partial_x + P_2(x),$$

где P_1, P_2 — произвольные полиномы. Таким образом, $Aut(A_1)$ состоит из ручных автоморфизмов. Интересной и важной задачей является задача описания множества орбит действия $Aut(A_1)$ на множестве решений (3). Если удастся описать множество орбит, то это даст шанс сравнить $End(A_1)$ и $Aut(A_1)$ ($End(A_1)$ состоит из эндоморфизмов $\varphi : A_1 \to A_1$, т.е. $[\varphi(\partial_x), \varphi(x)] = 1$). Согласно гипотезе Диксмье $End(A_1) = Aut(A_1)$, или другими словами, если дифференциальные операторы L_n, L_m с полиномиальными коэффициентами удовлетворяют уравнению струны

$$[L_n, L_m] = 1,$$

то L_m, L_n могут быть получены из x, ∂_x с помощью φ_j.

Берест высказал следующую интересную гипотезу:

Если риманова поверхность, отвечающая уравнению $f = 0$ с общими $\alpha_{ij} \in \mathbb{C}$ имеет род $g = 1$, то множество орбит является бесконечным и если $g > 1$, то существует только конечное число орбит.

Можно показать, что если существует конечное число орбит для некоторого уравнения (3), то $End(A_1) = Aut(A_1)$.

В [1] была доказана следующая теорема.

Теорема 1 *Множество орбит действия группы $Aut(A_1)$ на множестве решений произвольного уравнения*

$$Y^2 = X^3 + c_2X^2 + c_1X + c_0, \quad X,Y \in A_1, c_j \in \mathbb{C}$$

бесконечно.

Эта теорема подтверждает первую часть гипотезы Береста. В [2] было доказано, что оператор

$$L_4^\natural = (\partial_x^2 + \alpha_1 \cosh x + \alpha_0)^2 + \alpha_1 g(g+1)\cosh x, \quad \alpha_1 \neq 0$$

коммутирует с некоторым оператором $L_{4g+2}^\natural$ порядка $4g+2$, при этом спектральная кривая пары $L_4^\natural, L_{4g+2}^\natural$ является гиперэллиптической кривой, заданной уравнением

$$w^2 = z^{2g+1} + c_{2g}^\natural z^{2g} + \ldots + c_1^\natural z + c_0^\natural \tag{4}$$

для некоторых $c_j^\natural$ (операторы $L_4^\natural, L_{4g+2}^\natural$ удовлетворяют этому уравнению).

Нами совместно с А.Б. Жегловым доказана следующая теорема.

Теорема 2 *Множество орбит действия группы $Aut(A_1)$ в множестве решений уравнения*

$$Y^2 = X^{2g+1} + c_{2g}^\natural X^{2g} + \ldots + c_1^\natural X + c_0^\natural, \quad X, Y \in A_1$$

бесконечно.

[1]. А.Б. Жеглов, А.Е. Миронов, *О коммутирующих дифференциальных операторах с полиномиальными коэффициентами, отвечающих спектральным кривым рода один.* Доклады академии наук, 2015. Т. 462. N.2. С. 135–136.

[2]. A.E. Mironov, *Periodic and rapid decay rank two self-adjoint commuting differential operators.*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **234** (2014), 309–322.

2. Опубликованные и поданные в печать работы

1. *Integrable geodesic flows on 2-torus: Formal solutions and variational principle.* Journal of Geometry and Physics, 2015. Vol. 87. N. 1, P. 39–47 (with M. Bialy).

2. *О собственных функциях одномерного оператора Шрёдингера с полиномиальными потенциалом.* Доклады академии наук, 2015. Т. 461. N. 3. (совместно с Б.Т. Сапарбаевой).

3. *О нерелятивистском двумерном чисто магнитном суперсимметричном операторе Паули.* Успехи матем. наук. 2015. Т.70, N. 2(422). С.109–140 (совместно с П.Г. Гриневичем и С.П. Новиковым).

4. *О коммутирующих дифференциальных операторах с полиномиальными коэффициентами, отвечающих спектральным кривым рода один.* Доклады академии наук, 2015. Т. 462. N.2. С. 135–136 (совместно с А.Б. Жегловым).

5. *О коммутирующих разностных операторах ранга 2.* Успехи матем. наук. 2015. Т.70, N. 3(423). С. 181–182 (совместно с Г.С. Маулешовой).

6. *Одноточечные коммутирующие разностные операторы ранга один.* Доклады академии наук, 2016 (совместно с Г.С. Маулешовой).

7. *Commuting ordinary differential operators with polynomial coefficients and automorphisms of the first Weyl algebra.* International Math. Research Notices, 2016 (with A.B. Zheglov).

3. Участие в конференциях и школах (приглашенные доклады)

1. Международная конференция "Hamiltonian system and their applications" Международный математический институт им. Л.Эйлера, Санкт-Петербург, 3–8 июня.

2. Конференция "Встреча поколений", Москва, 9–11 июня.

3. Международная конференция "3-rd Conference on Finite Dimensional Integrable Systems in Geometry and Mathematical Physics 2015", Международный математический центр им. Стефана Банаха, Бедлево, Польша, 12–17 июля.

4. Международная конференция "Toric Topology, Number Theory and Applications", Хабаровск, 6–12 сентября.

5. Международная конференция "International Conference on Geometry and Quantization", Мадрид, Испания, 14–18 сентября.

6. Международная конференция "MAGADAN CONFERENCE", Магадан, 6–12 декабря.

4. Работа в научных центрах и международных группах

1. Tel-Aviv University.

2. University of Science and Technology of China, Hefei.

3. Tsuda College, Tokyo.

5. Педагогическая деятельность

Семинар "Интегрируемые системы", Новосибирский государственный университет.

Научное руководство.

Магистранты: М. Зайнуллина, Л. Урынбаева.

Аспиранты: С. Агапов, В. Давлетшина, М. Ерментай, Г. Маулешова, Б. Сапарбаева.

В 2015 году В. Давлетшина защитила кандидатскую диссертацию.