Отчёт по гранту фонда «Династия» за 2015 год

Перепечко Александр Юрьевич

1 Полученные результаты

Все рассматриваемые многообразия предполагаются нормальными алгебраическими многообразиями над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ нулевой характеристики.

1.1 Группы автоморфизмов аффинных поверхностей. Основной результат исследований 2014 года — наша совместная работа с М.Г. Зайденбергом, посвящённая изучению групп автоморфизмов аффинных алгебраических поверхностей. Она разбита на две части, первая из которых, написанная в соавторстве с МГ. Зайденбергом и С. Коваленко, изложена в препринте [1], а вторая будет окончена в первой половине 2015 года. Ниже мы опишем их содержание.

Аффинные поверхности делятся на три типа (ML_n), $n = 0, 1, 2$, в соответствии с инвариантом Макар–Лиманова, то есть действиями аддитивной группы поля $\mathbb{G}_a$. Поверхности без $\mathbb{G}_a$-действий принадлежат типу (ML_2); с единственным с точностью до эквивалентности $\mathbb{G}_a$-действием или, что эквивалентно, с единственным $\mathbb{A}^1$-расслоением над аффинной базой, — типу (ML_1); прочие, также называемые поверхностями Гизатуллина — типу (ML_0).

Систематизация известных результатов о группах автоморфизмов аффинных поверхностей, проведённая в [1], включает следующие шаги. Во-первых, перечислены действия алгебраических групп на поверхностях, в особенности с открытой орбитой. Во-вторых, изложено описание поверхностей с группой автоморфизмов ненулевого ранга, то есть содержащих алгебраический тор. Оно включает в себя список торических поверхностей и их групп автоморфизмов, а также представление Долгачёва–Пинкхэма–Демазюра поверхностей с действием мультипликативной группы поля. В-третьих, изложено строение групп автоморфизмов поверхностей Гизатуллина в терминах амальгамированных произведений и фундаментальной группы графа групп, где в качестве групп берутся подгруппы автоморфизмов, сохраняющих данное $\mathbb{A}^1$-расслоение.

Новый результат статьи [1] заключается в описании подгруппы автоморфизмов, сохраняющих данное $\mathbb{A}^1$-расслоение, через компактификацию поверхности. А именно, с точностью до конечного индекса такая подгруппа равна полупрямому произведению бесконечномерной абелевой унипотентной группы, действующей сдвигами на слоях, и метабелева расширения алгебраического тора размерности не более двух. Данный результат позволяет описать элементы графов групп, соответствующих поверхностям Гизатуллина, а также даёт исчерпывающий ответ о строении групп автоморфизмов поверхностей типа (ML_1). В доказательстве используется техника пространств дуг, рядов Пюизо и формальных окрестностей.

Наши результаты о группах автоморфизмов поверхностей типа (ML_2), находящиеся в процессе подготовки к публикации, неоднократно излагались на российских и международных конференциях. Задача описания группы автоморфизмов $\operatorname{Aut} X$ поверхности X типа (ML_2) подразбивается на описание связной компоненты $\operatorname{Aut}^\circ X$ и дискретного фактора $\operatorname{Aut} X / \operatorname{Aut}^\circ X$. Во-первых, нами получен критерий, когда связная компонента является алгебраической группой. Во-вторых, дано описание дискретного фактора в терминах двойственного графа к граничному дивизору компактификации поверхности.

1.2 Сферические многообразия. Дополнена совместная работа с К. Ланглуа о нормализованных $\mathbb{G}_a$-действиях на сферических многообразиях. Пусть G — связная редуктивная алгебраическая группа, $B \subset G$ — максимальная разрешимая подгруппа, или подгруппа Бореля, $T \subset B$ — максимальный тор, а X — нормальное аффинное многообразие, снабжённое эффективным G-действием. Напомним, что X называется G-сферическим, если подгруппа B действует с открытой орбитой на X. Теория Луны–Вюста описывает такие многообразия при помощи комбинаторных объектов, определяемых структурой открытой G-орбиты.

Ранее[1] мы установили соответствие в терминах теории Луны–Вюста между классами эквивалентности G-нормализованных $\mathbb{G}_a$-действий на X и квазиаффинными однородными пространствами, наделёнными действием полупрямых произведений $\mathbb{G}_a \rtimes G$ и являющихся G-сферическими, причём дополнение к открытой G-орбите в них либо пусто, либо является G-орбитой коразмерности один. Также нами было описало множество G-нормализованных $\mathbb{G}_a$-действий для группы $G = G_e = \mathrm{SL}_2 \ltimes \mathbb{T}$, где $\mathbb{T}$ — алгебраический тор.

В 2015 году мы дополнили данную работу полным описанием всех аффинных однородных G_e-сферических пространств. Оно было проведено как в терминах теории Луны–Вюста с вычислением соответствующих комбинаторных объектов, так и в терминах полиэдральных дивизоров, то есть как T-многообразия сложности один согласно теории Альманна–Хаузена.

2 Публикации

[1] S. Kovalenko, A. Perepechko, and M. Zaidenberg, *On automorphism groups of affine surfaces*, arXiv:1511.09051.

3 Конференции, доклады

Июнь: Конференция «Встреча поколений» Фонда «Династия», Москва. Доклад «Группы автоморфизмов аффинных поверхностей».

Июнь: Пятая школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», Самара. Доклад «Группы автоморфизмов аффинных поверхностей без аддитивных действий».

[1] K. Langlois, A. Perepechko. *Demazure roots and spherical varieties: the example of horizontal* SL(2)*-actions*, arXiv:1406.5744.

Август: “School (and Workshop) on Finite Subgroups of Cremona Groups”, Тренто, Италия. Доклад “Automorphism groups of affine surfaces without additive actions”.

Сентябрь: Manchester Geometry Seminar, Университет Манчестера, Великобритания. Доклад “Automorphism Groups of Affine Varieties”.

4 Совместная работа в научных центрах

Апрель: Совместная научная деятельность с М.Г. Зайденбергом и К. Ланглуа в Математическом институте Макса Планка (Бонн, Германия). Результаты содержатся в вышеизложенных.

Сентябрь: Совместная научная деятельность с Х. Зюссом в Школе математики Университета Манчестера (Великобритания). Начат проект по эквивариантным вырождениям многообразий Фано.

5 Педагогическая деятельность

Проведены мини-курсы для студентов и аспирантов об автоморфизмах аффинных поверхностей в Исследовательской лаборатории имени П.Л. Чебышёва, Санкт-Петербург, а также в Институте математики имени С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск.