Итоговый отчёт по гранту фонда «Династия» за 2015–2017 годы

Перепечко Александр Юрьевич

1 Полученные результаты

Все рассматриваемые многообразия предполагаются нормальными алгебраическими многообразиями над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ нулевой характеристики. Основной темой исследований являются группы автоморфизмов аффинных многообразий.

1.1 История и проблематика. Описание групп автоморфизмов многообразий является классической задачей, результаты решения которой используются в первую очередь для изучения структуры многообразий, в том числе с эквивариантной точки зрения, построения многообразий с заданными свойствами, а также служат неисчерпаемым источником групповых структур, таких, как амальгамированные произведения, фундаментальные группы графов групп и другие.

Современные усилия в изучении групп автоморфизмов в значительной степени сконцентрированы на наиболее естественных аффинных многообразиях - аффинных пространствах. И если в случае размерности два полное описание получено благодаря результатам Х. Юнга и У. ван дер Кулька, то в размерности три и выше удаётся лишь выдвигать отдельные гипотезы. Так, например, знаменитая гипотеза М.Нагаты 1972 года о существовании автоморфизма трёхмерного аффинного пространства, не являющегося ручным, была доказана И.П.Шестаковым и У.У.Умирбаевым в 2004 году.

Исключительная сложность устройства групп автоморфизмов аффинных многообразий приближает их к группам бирациональных преобразований многообразий, в частности, к группам Кремоны, которые являются ключевыми объектами бирациональной геометрии и служат богатым источником неожиданных и значимых открытий. Данными вопросами занимаются такие специалисты, как И.В.Долгачёв, С.Канта, В.Л.Попов, Ю.Г.Прохоров и другие, а также их ученики.

Группы автоморфизмов, в отличие от групп Кремоны, допускают структуру инд-многообразия - индуктивного предела алгебраических подмножеств, и тем самым обладают достаточно естественной алгебраической структурой. Эту структуру впервые изложил И.Р. Шафаревич в своей лекции в Риме в 1965 году. Позже он также выдвинул ряд утверждений, характеризующих их свойства. Хотя в последние двадцать лет было показано, что они верны лишь при дополнительных предположениях, см. работы Кумара, Камбаяши, Х. Крафта, однако они послужили толчком к становлению теории инд-групп и её применениям к группам автоморфизмов. В недавних работах Х.Крафта и Ж.-Ф.Фюртера предпринимаются попытки заложить основания теории групп автоморфизмов как таковых, без привязки к конкретному семейству многообразий.

Однако, несмотря на существование структуры инд-многообразия, группы автоморфизмов, как правило, не допускают структуры индуктивного предела алгебраических подгрупп. Основной целью нашего исследования является описание взаимосвязи наличия такой структуры и геометрических свойств рассматриваемого многообразия. Также мы устанавливаем явный вид группы автоморфизмов при наличии такой структуры.

1.2 Группы автоморфизмов аффинных поверхностей. Первым этапом нашего исследования служит классификация групп автоморфизмов аффинных поверхностей в соавторстве с М.Г. Зайденбергом и С. Коваленко, см. [?]. Она включает систематизацию известных результатов о группах автоморфизмов аффинных поверхностей. Во-первых, перечислены действия алгебраических групп на поверхностях, в особенности с открытой орбитой. Во-вторых, изложено описание поверхностей с группой автоморфизмов ненулевого ранга, то есть содержащих алгебраический тор. Оно включает в себя список торических поверхностей и их групп автоморфизмов, а также представление Долгачёва–Пинкхэма–Демазюра поверхностей с действием мультипликативной группы поля. В-третьих, изложено строение групп автоморфизмов поверхностей Гизатуллина в терминах амальгамированных произведений и фундаментальной группы графа групп, где в качестве групп берутся подгруппы автоморфизмов, сохраняющих данное $\mathbb{A}^1$-расслоение.

Далее, аффинные поверхности делятся на три типа (ML_n), $n = 0, 1, 2$, в соответствии с инвариантом Макар–Лиманова, то есть действиями аддитивной группы поля $\mathbb{G}_a$. Поверхности без $\mathbb{G}_a$-действий принадлежат типу (ML_2); с единственным с точностью до эквивалентности $\mathbb{G}_a$-действием или, что эквивалентно, с единственным $\mathbb{A}^1$-расслоением над аффинной базой, — типу (ML_1); прочие, также называемые поверхностями Гизатуллина — типу (ML_0).

Новый результат заключается в описании групп автоморфизмов поверхностей типов (ML_1) и (ML_2). Основным подходом является представление бирациональных преобразований пополнений поверхностей в комбинаторных терминах. А именно, при пополнении поверхности группа её автоморфизмов вкладывается в группу бирациональных преобразований пополнения и равна подгруппе, сохраняющей поверхность и действующей на ней регулярно. Такие бирациональные преобразования допускают разложение Хиронаки в цепочку раздутий и стягиваний точек на бесконечно удалённом дивизоре. При переходе к двойственному представлению такое разложение превращается в цепочку комбинаторных преобразований конечных взвешенных графов.

Эта техника, введённая В.И. Даниловым и М.Х. Гизатуллиным и использовавшаяся Д.Дэйглем, была развита в работах М.Г.Зайденберга, Ш.Калимана и Х.Фленнера. В то время как для поверхностей с аддитивными действиями бирациональные преобразования пополнения по комбинаторным преобразованиям графов восстанавливаются с точностью до выбора центров раздутий, в случае поверхностей без оных действий бирациональное преобразование определяется однозначно с точностью до регулярного автоморфизма пополнения.

Мы установили, что подгруппа автоморфизмов, сохраняющих данное $\mathbb{A}^1$-расслоение, с точностью до конечного индекса равна полупрямому произведению бесконечномерной абелевой унипотентной группы, действующей сдвигами на слоях, и метабелева расширения алгебраического тора размерности ≤ 2. Данный результат позволяет описать элементы графов групп, соответствующих поверхностям Гизатуллина, а также даёт исчерпывающий ответ о строении групп автоморфизмов поверхностей типа (ML_1). В доказательстве используется техника пространств дуг, рядов Пюизо и формальных окрестностей.

В случае поверхностей типа (ML_2) задача описания группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}\, X$ поверхности X подразбивается на описание связной компоненты $\mathrm{Aut}^\circ X$ и дискретного фактора $\mathrm{Aut}\, X / \mathrm{Aut}^\circ X$. Мы доказали, что связная компонента является алгебраическим тором размерности ≤ 2, не используя дополнительные предположения о лог-Кодаировой размерности или связной компоненте. Также мы получили полное описание дискретного фактора в терминах двойственного графа к граничному дивизору компактификации поверхности и продемонстровали его взаимосвязь с группой Томпсона. Тем самым, мы завершили классификацию групп автоморфизмов аффинных алгебраических поверхностей.

1.3 Группы автоморфизмов, состоящие из алгебраических элементов. Результаты, полученные для аффинных поверхностей, позволили выдвинуть следующую гипотезу: связная компонента группы автоморфизмов аффинного многообразия является индуктивным пределом алгебраических подгрупп тогда и только тогда, когда многообразие допускает с точностью до эквивалентности не более одного $\mathbb{G}_a$-действия.

Тем самым мы предлагаем провести следующую границу сложности групп автоморфизмов: наличие двух некоммутирующих унипотентных элементов. Это позволит заложить основу для будущей классификации групп автоморфизмов аффинных многообразий произвольной размерности.

Автоморфизм называется алгебраическим, если порождённая им подгруппа лежит в алгебраическом подмножестве или, эквивалентно, данный автоморфизм лежит в алгебраической подгруппе. Общеизвестно, что при наличии унипотентного элемента группа автоморфизмов аффинного многообразия размерности ≥ 2 бесконечномерна. Выдвинутая нами гипотеза влечёт такие следствия:

- Связная компонента группы автоморфизмов является алгебраической группой (то есть конечномерна) тогда и только тогда, когда она не содержит унипотентных элементов.

- Связная компонента состоит из алгебраических элементов тогда и только тогда, когда унипотентные элементы образуют коммутативную подгруппу.

В совместной работе с А. Регетой мы усилили данную гипотезу до предположения об эквивалентности следующих условий:

1. связная компонента группы автоморфизмов состоит из алгебраических элементов;
2. она равна индуктивному пределу алгебраических подгрупп;

3. она равна полупрямому произведению алгебраического тора и абелевой унипотентной группы;
4. касательная алгебра группы автоморфизмов состоит из локально конечных элементов;
5. подгруппа, порождённая унипотентными элементами, коммутативна.

Нам удалось доказать эквивалентность условий 2–4, а также, что условие 5 следует из любого из предыдущих. Напомним, что в размерности ≤ 2 эквивалентность условий 1–5 является следствием результатов, описанных в предыдущем разделе.

В случае, когда все унипотентные элементы группы автоморфизмов коммутируют между собой, мы опираемся на теорию инд-групп, в частности, на недавние результаты Х. Крафта и Ж.-Ф. Фюртера, а также на метод градуированных дифференцирований М.Г. Зайденберга и Х. Фленнера. Данный метод, несмотря на относительную простоту, позволяет охарактеризовать строение алгебры дифференцирований в исследуемом случае.

С помощью данного метода у нас получилось извлечь полную информацию о строении подмножества локально конечных дифференцирований, и перейти к структуре группы автоморфизмов, опираясь на теорию инд-групп и взаимосвязь инд-группы и её касательной алгебры. А именно, касательная алгебра группы автоморфизмов как инд-группы лежит в алгебре дифференцирований и отображается в алгебру алгебраических векторных полей на многообразии. Оказывается, что связная компонента группы автоморфизмов состоит из алгебраических элементов тогда и только тогда, когда её образ состоит из локально конечных векторных полей.

Мы используем данный факт для проверки того, что связная компонента равна индуктивному пределу алгебраических подгрупп. В данном случае, для того, чтобы выразить её структуру как полупрямого произведения в условии 3, мы пользуемся структурной теорией алгебраических групп.

Имея же два некоммутирующих унипотентных элемента, мы предъявляем пару линейно независимых локально конечных векторных полей на исследуемом многообразии. С помощью методов локального анализа мы построили подалгебру в касательной алгебре группы автоморфизмов с достаточно богатой структурой и извлекли ряд свойств, характеризующих сложность группы автоморфизмов в данном случае, таких как наличие неалгебраического элемента. В частности, мы опирались на соответствия между локально нильпотентными дифференцированиями, однопараметрическими унипотентными группами автоморфизмов и векторными полями на многообразии.

1.4 Сферические многообразия. Дополнена совместной работа с К. Ланглуа[1]. В ней изучаются нормализованные $\mathbb{G}_a$-действия на сферических G-многообразиях, где G — редуктивная группа ранга 1. Пусть $B \subset G$ — максимальная разрешимая подгруппа, или подгруппа Бореля, $T \subset B$ — максимальный тор, а X — нормальное аффинное многообразие, снабжённое эффективным G-действием. Напомним, что X называется G-сферическим, если подгруппа B действует с открытой орбитой на X. Теория Луны–Вюста описывает такие многообразия при помощи комбинаторных объектов, определяемых структурой открытой G-орбиты.

[1] K. Langlois, A. Perepechko. *Demazure roots and spherical varieties: the example of horizontal* SL(2)*-actions*, arXiv:1406.5744.

В работе установлено соответствие в терминах теории Луны–Вюста между классами эквивалентности G-нормализованных $\mathbb{G}_a$-действий на X и квазиаффинными однородными пространствами, наделёнными действием полупрямых произведений $\mathbb{G}_a \rtimes G$ и являющихся G-сферическими, причём дополнение к открытой G-орбите в них либо пусто, либо является G-орбитой коразмерности один.

Дополнение состоит в полном описании всех аффинных однородных G-сферических пространств. Оно было проведено как в терминах теории Луны–Вюста с вычислением соответствующих комбинаторных объектов, так и в терминах полиэдральных дивизоров, то есть как T-многообразия сложности один согласно теории Альманна–Хаузена.

1.5 Гибкие конусы над многообразиями, покрытыми гибкими картами. Многообразие называется *гибким*, если касательное пространство к нему в произвольной гладкой точке порождается касательными векторами к орбитам $\mathbb{G}_a$-действий аддитивной группы поля $\mathbb{G}_a = \mathbb{G}_a(\mathbb{K})$. Это эквивалентно бесконечной транзитивности действия подгруппы автоморфизмов, порождённой $\mathbb{G}_a$-действиями, на подмножестве гладких точек[2].

В совместной работе с Хендриком Зюссом и Матеушем Михалеком [1] мы доказываем гибкость следующих семейств многообразий:

1. аффинные конусы над многообразиями секущих вложений Веронезе–Сегре;
2. аффинные конусы над рядом трёхмерных многообразий Фано;
3. тотальные координатные пространства (т.е. спектр кольца Кокса) гладких поверхностей дель Пеццо;
4. тотальные координатные пространства гладких проективных T-многообразий сложности один.

Для проверки гибкости в первых трёх случаях мы построили покрытие базовых многообразий гибкими аффинными картами и доказали признак гибкости аффинного конуса над таким покрытием. В последнем же случае гибкость проверялась построением достаточного числа трансверсальных $\mathbb{G}_a$-действий.

1.6 Алгоритм Винберга. Гиперболическая решётка, то есть решётка сигнатуры $(n, 1)$ в $(n+1)$-мерном пространстве, называется рефлективной, если подгруппа её симметрий, порождённая отражениями, имеет конечный индекс. Они существуют только при $n < 22$, и всего таких решёток конечное число, однако задача классификации полностью решена лишь при $n = 2$. В 1972 году Э.Б. Винбергом был представлен алгоритм, для данной рефлективной решётки последовательно выводящий грани фундаментального многогранника группы, порождённой отражениями.

Совместно с Н.В. Богачёвым мы представили программную реализацию[3] алгоритма Винберга. В отличие от предыдущих реализаций, она принимает гиперболические решётки произвольного вида. Программа была протестирована на большом количестве гиперболических решёток, в том числе были найдены новые рефлективные гиперболические решётки.

[2] I.V. Arzhantsev, H. Flenner, S. Kaliman, F. Kutzschebauch, and M. Zaidenberg, *Flexible varieties and automorphism groups*, Duke Math. J. **162** (2013), no. 4, 767–823.

[3] `https://github.com/aperep/vinberg-algorithm`, DOI:10.5281/zenodo.1098448.

2 Публикации

[1] M. Michałek, A. Perepechko, H. Süß, *Flexible affine cones and flexible coverings*, arXiv:1612.01144, accepted in: Mathematische Zeitschrift.

[2] S. Kovalenko, A. Perepechko, and M. Zaidenberg, *On automorphism groups of affine surfaces*, to appear in: Algebraic Varieties and Automorphism Groups, Advanced Studies in Pure Mathematics **99** (20XX), стр. 207—286.

3 Конференции, доклады

06/2015 Конференция «Встреча поколений» Фонда «Династия», Москва. Доклад «Группы автоморфизмов аффинных поверхностей».

06/2015 Пятая школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», Самара. Доклад «Группы автоморфизмов аффинных поверхностей без аддитивных действий».

08/2015 "School (and Workshop) on Finite Subgroups of Cremona Groups", Тренто, Италия. Доклад "Automorphism groups of affine surfaces without additive actions".

09/2015 Manchester Geometry Seminar, Университет Манчестера, Великобритания. Доклад "Automorphism Groups of Affine Varieties".

03/2016 Семинар "Algebra and Geometry", Университет Базеля, Швейцария. Доклад "Automorphism groups of affine algebraic surfaces preserving an A1-fibration".

09/2016 Конференция "Cremona Conference", Базель, Швейцария. Постерный доклад "Automorphism groups of affine surfaces".

10/2016 Семинар "Algèbre et géométries", Гренобль, Франция. Доклад "Automorphism groups with only algebraic elements".

10/2016 Конференция "Affine geometry, hyperbolicity, complex analysis", Гренобль, Франция. Постерный доклад "Automorphism groups without non-algebraic elements".

01/2017 Конференция «Рождественские чтения», Москва. Доклад «Группы автоморфизмов аффинных многообразий, состоящие из алгебраических элементов».

01/2017 Пятая школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», Москва. Доклад «Группы автоморфизмов аффинных многообразий, состоящие из алгебраических элементов».

11/2017 60-я Научная конференция МФТИ, Долгопрудный. Доклад «Группы автоморфизмов аффинных многообразий, состоящие из алгебраических элементов».

4 Совместная работа в научных центрах

04/2015 Совместная научная деятельность с М.Г. Зайденбергом и К. Ланглуа в Математическом институте Макса Планка (Бонн, Германия). Результаты содержатся в вышеизложенных.

09/2015 Совместная научная деятельность с Х. Зюссом в Школе математики Университета Манчестера (Великобритания). Начат проект по эквивариантным вырождениям многообразий Фано.

03/2016 Совместная научная деятельность с А. Регетой в Математическом институте, Университет Базеля, Швейцария. Результаты содержатся в вышеизложенных.

10/2016 Совместная научная деятельность с М.Г. Зайденбергом и А. Регетой в Институте Фурье, Гренобль, Франция. Результаты содержатся в вышеизложенных. Также продолжена работа над препринтом о группах автоморфизмов поверхностей без $\mathbb{G}_a$-действий.

5 Педагогическая деятельность

2015 Проведены мини-курсы для студентов и аспирантов об автоморфизмах аффинных поверхностей в Исследовательской лаборатории имени П.Л. Чебышёва, Санкт-Петербург, а также в Институте математики имени С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск.

2016 Проведён мини-курс для студентов Механико-математического факультета МГУ по теме «Группы автоморфизмов аффинных многообразий, состоящие из алгебраических элементов».

2017 Руководство практикой студента Мехмата МГУ по теме «Аддитивные действия на взвешенных проективных пространствах».

2017 Проведены курсы для студентов в рамках бакалавриата ФИВТ МФТИ: обязательные семинары по предметам «Дискретный анализ» и «Геометрия в компьютерных приложениях», а также спецсеминар «Геометрии и группы преобразований».

6 Сравнение с первоначальной заявкой

Совместная работа (1.5) с Х. Зюссом и М. Михалеком была успешно окончена за время выполнения проекта, при этом признак гибкости конусов был существенно усилен, а техника, использованная для описания многообразий сечений, изложена в адаптированном виде, не требующем узкоспециальных знаний. Это сделано сверх заявки.

Совместные проекты с К. Ланглуа не были развиты далее начального этапа (1.4) — изучения и представления в комбинаторном виде множества нормализуемых $\mathbb{G}_a$-действий на G-сферических аффинных многообразиях для редуктивных групп G

ранга 1. Основной причиной послужила высокая техническая сложность доказательств и практическая невозможность их обобщения на группы большего ранга.

Основная цель проекта — классификация групп автоморфизмов в зависимости от наличия $\mathbb{G}_a$-действий — реализована в объёме, существенно превышающем заявленный. А именно, помимо классификации групп автоморфизмов в случае аффинных поверхностей (1.2) удалось найти подход к случаю произвольной размерности (1.3): сформулировать гипотезу классификации, продвинуться в её доказательстве и описать группы автоморфизмов одного из классов многообразий. Результаты оформляются в виде совместных статей.

Наконец, сверх заявки был реализован алгоритм Винберга (1.6). Программа уже используется для поиска рефлективных решёток.