Отчет по гранту фонда Династия за 2015 год

Артур Томберг

1 Результаты, полученные в этом году

Гладкое многообразие M называется гиперкэлеровым, если на нем есть тройка интегрируемых почти-комплексных структур I, J, K, удовлетворяющих кватернионным соотношениям $I^2 = J^2 = K^2 = -1$, $IJ = -JI = K$, и метрика g, эрмитова по отношению ко всем трем структурам I, J, K, и такая, что соответствующие эрмитовы формы $\omega_I, \omega_J, \omega_K$ замкнуты. В отсутствии заданной метрики, структура (M, I, J, K) называется гиперкомплексной. На M имеется двумерная сфера почти-комплексных структур $S^2 = \left\{aI + bJ + cK : a^2 + b^2 + c^2 = 1\right\} \cong \mathbb{CP}^1$, и можно показать, что все эти структуры интегрируемы. Изучение кватернионной структуры M можно свести к изучению комплексной структуры твисторного пространства $\mathrm{Tw}(M)$, которое определяется топологически как декартово произведение $M \times \mathbb{CP}^1$, с естественными проекциями

$$\begin{tikzcd} & M \times \mathbb{CP}^1 \arrow[dl, "\sigma"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\ M & & \mathbb{CP}^1 \end{tikzcd}$$

Отождествление $\mathbb{CP}^1$ с двумерной сферой комплексных структур на M задает на $\mathrm{Tw}(M)$ естественную комплексную структуру, такую что проекция $\pi : \mathrm{Tw}(M) \to \mathbb{CP}^1$ является голоморфным отображением. В случае гиперкэлерова M, естественная метрика произведения на $\mathrm{Tw}(M)$ является эрмитовой, однако соответствующая эрмитова форма ω никогда не замкнута. Тем не менее, как было доказано Д. Калединым и М. Вербицким, она удовлетворяет более слабому условию сбалансированности $d\omega^{n-1} = 0$, где $n = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Tw}(M)$. Этого условия оказывается достаточно для существования адекватной структуры пространства модулей стабильных расслоений на $\mathrm{Tw}(M)$.

В работе [1] доказательство сбалансированности $\mathrm{Tw}(M)$ обобщается на случай общего гиперкомплексного многообразия M. В отсутствии заданной метрики на M, сбалансированность $\mathrm{Tw}(M)$ доказывается неявно. Ключевым моментом доказательства является результат о том, что любую положительную $(n-1, n-1)$-форму η на $\mathrm{Tw}(M)$ можно выразить как $(n-1)$-ую степень некоторой положительной $(1,1)$-формы, которая таким образом будет сбалансированной, если η замкнута. Такую замкнутую положительную $(n-1, n-1)$-форму η можно задать на $\mathrm{Tw}(M)$ как сумму плюрилапласиана пулбэка по проекции σ некоторой степени произвольной гиперэрмитовой формы на M и соответствующей послойной формы объема.

Помимо этого, велась работа по изучению послойно стабильных расслоений на $\mathrm{Tw}(M)$, т. е. таких голоморфных расслоений E на $\mathrm{Tw}(M)$, ограничение которых на слой проекции $\pi : \mathrm{Tw}(M) \to \mathbb{CP}^1$ стабильно. Несложно доказать, что такое расслоение будет стабильным на $\mathrm{Tw}(M)$. Представляет интерес обратное утверждение: следует ли из стабильности расслоения E послойная стабильность? Путем изучения пространства голоморфных сечений проекции $\pi : \mathrm{Tw}(M) \to \mathbb{CP}^1$, были получены частичные результаты, которые позволяют предполагать верность утверждения для случая гиперкэлерова M. В следующем году планируется закончить доказательство этой гипотезы, а также обобщить ее на случай гиперкомплексного M.

2 Опубликованные и поданные в печать работы

[1] A. Tomberg, "Twistor spaces of hypercomplex manifolds are balanced", *Advances in Mathematics* **280** (2015), 282-300

3 Участие в коференциях и школах

1. "Workshop on rationally connected varieties", 18-22 мая 2015, НИУ ВШЭ (Москва)
2. "Workshop on projective algebraic geometry", 7-12 сентября 2015, НИУ ВШЭ (Москва)

4 Работа в научных центрах и международных группах

Являюсь членом научно-учебной группы НИУ ВШЭ "Геометрические структуры на комплексных многообразиях" под руководством М. Вербицкого. Провел зимний семестр (январь-март) в университете МакГилла (Монреаль, Канада), где работал под руководством Ж. Уртюбиза. С сентября 2015 года - стажер-исследователь Лаборатории алгебраической геометрии и ее приложений НИУ ВШЭ.

5 Педагогическая деятельность

В осеннем семестре (сентябрь-декабрь) - учебный ассистент в НМУ по курсу "Topology 2" программы Math in Moscow (преподаватель: А. Б. Сосинский).