Отчет по гранту фонда Династия за 2017 год

Артур Томберг

1 Результаты, полученные за весь период

В моей заявке описывались два возможных направления исследований: изучение послойно-стабильных расслоений на твисторном пространстве гиперкэлерова (и более общо, гиперкомплексного) многообразия и изучение гиперголоморфных расслоений (и их пространств модулей) на HKT-многообразиях. В ходе работы были получены интересные результаты в первом направлении, в то время как второе направление требует дальнейших исследований.

Гладкое многообразие M с тройкой интегрируемых почти-комплексных структур I, J, K, удовлетворяющих кватернионным соотношениям $I^2 = J^2 = K^2 = -1$, $IJ = -JI = K$, называется гиперкомплексным. Если на M также задана метрика g, эрмитова по отношению к этим трем структурам, и такая что соответствующие эрмитовы формы $\omega_I, \omega_J, \omega_K$ замкнуты, M называется гиперкэлеровым. Это условие эквивалентно замкнутости 2-формы $\Omega_I = \omega_J + \sqrt{-1}\omega_K$; если эта форма удовлетворяет более слабому условию ∂_I-замкнутости, M называется HKT-многообразием. Нетрудно видеть, что на гиперкомплексном многообразии имеется целая 2-сфера интегрируемых почти-комплексных структур

$$S^2 = \left\{ aI + bJ + cK : a^2 + b^2 + c^2 = 1 \right\},$$

называемых индуцированными структурами. Произведение $M \times S^2$, параметризующее индуцированные структуры в точках M, называется твисторным пространством гиперкомплексного многообразия и обозначается через $\mathrm{Tw}(M)$. Отождествляя S^2 с $\mathbb{CP}^1$, можно показать, что на $\mathrm{Tw}(M) = M \times \mathbb{CP}^1$ есть естественная комплексная структура, такая что проекция $\pi : \mathrm{Tw}(M) \to \mathbb{CP}^1$ голоморфна. Кроме этого, многообразие $\mathrm{Tw}(M)$ допускает сбалансированную метрику, что является достаточным условием для корректного определения степени векторного расслоения E на $\mathrm{Tw}(M)$. Таким образом, имеет смысл говорить о стабильных расслоениях на $\mathrm{Tw}(M)$ и их пространстве модулей.

В статье “Non-Hermitian Yang-Mills connections” Д. Каледина и М. Вербицкого доказывается, среди прочего, что для гиперкэлерова многообразия M, расслоение E на $\mathrm{Tw}(M)$, стабильно ограничивающееся на общий слой твисторной проекции $\pi : \mathrm{Tw}(M) \to \mathbb{CP}^1$ (такое расслоение называется послойно стабильным), не имеет подпучков строго меньшего ранга (в данном случае, мы называем расслоение E простым). Основным направлением моей научной деятельности была работа над доказательством обратного утверждения о том что для простого расслоения E на $\mathrm{Tw}(M)$, ограничение $E_I = E|_{\pi^{-1}(I)}$ будет стабильным расслоением на общем слое $I \in \mathbb{CP}^1$. В этом направлении были достигнуты частичные результаты, а именно, утверждение было доказано для случаев $\mathrm{rk}\ E = 2, 3, 5$, а также в общем случае, при условии что для хотя бы одного $I \in \mathbb{CP}^1$, $\mathrm{Hom}(E_I, E_I) = \mathbb{C}$.

Первым шагом в данном направлении было доказательство того, что для расслоения E на $\mathrm{Tw}(M)$, рассматриваемого как семейство расслоений на слоях проекции $\pi : \mathrm{Tw}(M) \to \mathbb{CP}^1$, послойная стабильность является открытым по Зарисскому условием на базе $\mathbb{CP}^1$. Доказательство этого факта является обобщением аргумента А. Телемана из статьи "Families of holomorphic bundles" (2008), в которой открытость по Зарисскому условия стабильности доказывается для семейств вида $X \times Y \to Y$, где X, Y - комплексные многообразия, удовлетворяющие некоторым условиям. Этот результат нельзя применить напрямую к твисторному семейству $\mathrm{Tw}(M) \to \mathbb{CP}^1$, так как $\mathrm{Tw}(M)$ не является произведением M и $\mathbb{CP}^1$ как комплексных многообразий, однако, оказывается, что аргумент Телемана работает и в случае твисторной проекции.

Используя этот факт, достаточно показать, что не существует простого расслоения E на $\mathrm{Tw}(M)$, нестабильно ограничивающегося на все слои твисторной проекции $\pi : \mathrm{Tw}(M) \to \mathbb{CP}^1$. Рассуждая от противного и используя взаимно-однозначное соответствие между подпучками $\mathcal{F} \subseteq E$ ранга s и линейными подпучками $L \subseteq \Lambda^s E$, лежащими в подмножестве $C^s(E) \subseteq \Lambda^s E$ внешних мономов, можно показать, что существует линейное расслоение L на $\mathrm{Tw}(M)$ и число $1 \leq s \leq \mathrm{rank}(E)$, такие что для каждого $I \in \mathbb{CP}^1$, существуют нетривиальные морфизмы

$$L_I = L|_{\pi^{-1}(I)} \longrightarrow C^s(E_I) \subseteq \Lambda^s(E_I).$$

Это эквивалентно тому, что в проективизации расслоения прямого образа $\pi_*(L^* \otimes \Lambda^s E)$ над $\mathbb{CP}^1$, подмножество

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, hook] \arrow[dr] & \mathbb{P}(\pi_*(L^* \otimes \Lambda^s E)) \arrow[d] \\ & \mathbb{CP}^1 \end{tikzcd}$$

элементов, соответствующих морфизмам $L_I \to \Lambda^s(E_I)$ с образом в $C^s(E_I)$, является алгебраическим многообразием и отображается сюръективно на $\mathbb{CP}^1$. Сечения $Y \to \mathbb{CP}^1$ соответствуют нетривиальным подпучкам $\mathcal{F} \subseteq E$ на $\mathrm{Tw}(M)$. Если ранг E равен двум или трем, такие сечения существуют всегда (следствие того, что все внешние степени такого E состоят из мономов), для случая $\mathrm{rk}\ E > 3$ нужен дополнительный аргумент с переходом к разветвленному накрытию.

2 Результаты, полученные в этом году

В этом году было окончательно доказано, что простое расслоение E на $\mathrm{Tw}(M)$ ранга 5 послойно стабильно. Как было описано выше, в случае $\mathrm{rk}\ E > 3$, существование алгебраических сечений $Y \to \mathbb{CP}^1$ не гарантировано, поэтому следующим шагом является выбор мультисечения, т. е. сечения Y над неким разветвленным накрытием $f : X \to \mathbb{CP}^1$. Взяв расслоенное произведение

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\rho"'] & \mathrm{Tw}(M) \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[r, "f"'] & \mathbb{CP}^1, \end{tikzcd}$$

мультисечение дает подпучок $\mathcal{F} \subset \varphi^*(E)$ над многообразием Z; взяв прямой образ по φ, получаем подпучок $\varphi_*(\mathcal{F}) \subset \varphi_*(\varphi^*(E))$ над $\mathrm{Tw}(M)$. Использую формулу проекции, дальнейший аргумент сводится к получению противоречия к несуществованию подпучков E. Для этого необходимо изучение морфизмов из E в подкрутки E и проверка, что все таковые морфизмы поднимаются с $\mathbb{CP}^1$, т. е. тривиальны на слоях твисторной проекции $\pi : \mathrm{Tw}(M) \to \mathbb{CP}^1$. Это верно при условии что для хотя бы одного $I \in \mathbb{CP}^1$, $\mathrm{Hom}(E_I, E_I) = \mathbb{C}$; для случая $\mathrm{rk}\, E = 5$ это условие доказывается от противного переходом к еще одному разветвленному накрытию $\mathbb{CP}^1$, соответствующему собственным значениям нетривиального морфизма $E \to E(k)$.

Стоит отметить, что послойная стабильность, по-видимому, следует из простоты E и для расслоений общего ранга с помощью некоего обобщения этого аргумента.

3 Опубликованные и поданные в печать работы, препринты

[1] A. Tomberg, “Fibrewise stable bundles on twistor spaces of hyperkähler manifolds”, preprint

4 Участие в конференциях и школах

Первая летняя математическая школа на Фонтанке: Геометрия 2017, 3-8 июля 2017, ПОМИ (Санкт-Петербург)

5 Работа в научных центрах и международных группах

Являюсь стажером-исследователем Лаборатории алгебраической геометрии и ее приложений НИУ ВШЭ. Провел осенний семестр (сентябрь-декабрь) в университете МакГилл (Канада, г. Монреаль), где работал под руководством Ж. Уртюбиза.

6 Педагогическая деятельность

В осеннем семестре (сентябрь-декабрь) - лектор по курсам “Foundations of mathematics” и “Mathematics for management”, университет МакГилл.