Летняя школа «Современная математика»
Дубна, июль 2001.

Ю. М. Бурман

О проективных пространствах и движениях, или геометрия без рисунков

МЦНМО, 2001

УДК 514.144
ББК 22.151.3
Б90

Проведение летней школы «Современная математика» и издание настоящей брошюры осуществлено при поддержке Московской городской Думы и Московского Комитета Образования.

Бурман Ю. М.

Б90 О проективных пространствах и движениях, или геометрия без рисунков. — М.: МЦНМО, 2001. — 14 с.

ISBN 5-94057-010-0

Брошюра написана по материалам цикла лекций, прочитанных автором участникам Летней школы «Современная математика» в Дубне 22–26 июля 2001 года.

Основное их содержание составляют два различных доказательства хорошо известного факта — существования гомеоморфизма между трехмерным проективным пространством $\mathbb{R}P^3$ и специальной ортогональной группой SO(3).

Брошюра адресована старшим школьникам и младшим студентам.

ББК 22.151.3

ISBN 5-94057-010-0

Краткое содержание (для специалистов)

Перед вами записки лекций, прочитанных мною в летней школе «Современная математика», проходившей в июле 2001 г. в Дубне. Основное их содержание составляют два различных доказательства хорошо известного факта — существования гомеоморфизма между трехмерным проективным пространством $\mathbb{R}P^3$ и специальной ортогональной группой $\mathrm{SO}(3)$.

Первое доказательство основано на том, что всякое преобразование $f \in \mathrm{SO}(3)$ имеет собственный вектор и, следовательно, представляет собой поворот относительно некоторой оси в трехмерном пространстве. Сопоставляя каждому преобразованию пару (ось поворота, угол поворота), мы получаем требуемый гомеоморфизм.

Второе доказательство использует тот факт, что $\mathrm{SO}(3)$ гомеоморфно сферизации касательного расслоения к двумерной сфере S^2. Реализуем сферу S^2 как комплексную проективную прямую $\mathbb{C}P^1$. Касательный вектор в точке $a \in \mathbb{C}P^1$ естественно соответствует квадратичной форме $\mu\colon a \to \mathbb{C}$. Сопоставляя каждой форме множество точек (прямую, если форма ненулевая), где она принимает вещественные неотрицательные значения, мы видим, что $\mathrm{SO}(3)$ гомеоморфно множеству пар (a, ℓ), где $a \subset \mathbb{C}^2$ — комплексная прямая, а $\ell \subset a$ — вещественная прямая. Но прямая $\ell \subset \mathbb{C}^2$ однозначно определяет прямую a, откуда следует, что $\mathrm{SO}(3)$ гомеоморфно множеству вещественных прямых в $\mathbb{C}^2$, т. е. $\mathbb{R}P^3$.

1. О проективных пространствах

Вещественным проективным пространством размерности n (обозначение $\mathbb{R}P^n$) называется множество прямых, проходящих через начало координат, в линейном пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ размерности $n+1$.

Утверждение 1.1. *Пространство $\mathbb{R}P^n$ гомеоморфно*:

1) *множеству ненулевых векторов в $\mathbb{R}^{n+1}$, в котором отождествлены любые два вектора, отличающиеся умножением на ненулевое вещественное число*;

2) *множеству наборов $\{[x_0 : x_1 : \ldots : x_n]\}$, где хотя бы одно $x_i \in \mathbb{R}$ отлично от нуля, и два набора $\{[x_0 : x_1 : \ldots : x_n]\}$ и $\{[y_0 : y_1 : \ldots : y_n]\}$ отождествлены, если существует ненулевое число $\lambda \in \mathbb{R}$ такое, что $y_0 = \lambda x_0$, $y_1 = \lambda x_1$, $\ldots$, $y_n = \lambda x_n$*;

3) *n-мерной сфере S^n (которую можно определить как множество векторов единичной длины в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$), у которой отождествлены пары диаметрально противоположных точек*;

4) *полусфере (или кругу) размерности n, в которой отождествлены пары диаметрально противоположных точек границы*;

5) *объединению $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}P^{n-1}$ (склеенных определенным образом)*;

Слова «A гомеоморфно B» (мы еще неоднократно будем их употреблять) означают, что существует взаимно однозначное соответствие (гомеоморфизм) между точками множеств A и B, причем это соответствие непрерывно — неформально говоря, «близким» точкам множества A соответствуют «близкие» точки множеств B, и наоборот.

Доказательство.

1) Пусть $\ell \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — прямая, $v \in \ell$ — лежащий в ней произвольный ненулевой вектор. Тогда v определяет ℓ однозначно, а ℓ определяет v однозначно с точностью до пропорциональности.

2) Возьмем в качестве $x_0, x_1, \ldots, x_n$ координаты вектора v.

3) Произвольная прямая $\ell \subset \mathbb{R}^{n+1}$ пересекает сферу в паре диаметрально противоположных точек.

4) Разобьем сферу из предыдущего пункта на две полусферы: верхнюю, заданную условием $x_{n+1} \geqslant 0$, и нижнюю, заданную условием $x_{n+1} \leqslant 0$ (мы считаем, что $x_1, \ldots, x_{n+1}$ — координаты в $\mathbb{R}^{n+1}$). Если прямая не лежит в гиперплоскости $x_{n+1} = 0$, то она пересекает верхнюю полусферу ровно в одной точке. Остальные прямые пересекают границу верхней и нижней полусфер в двух диаметрально противоположных точках каждая. Круг (единичного радиуса) получается вертикальной проекцией полусферы на гиперплоскость $x_{n+1} = 0$.

5) Прямые, не лежащие в гиперплоскости $x_{n+1} = 0$, пересекают гиперплоскость $x_{n+1} = 1$ в одной точке. Такие прямые взаимно однозначно соответствуют точкам этой гиперплоскости и, следовательно, точкам линейного пространства $\mathbb{R}^n$. Остальные прямые лежат в n-мерном пространстве, заданном уравнением $x_{n+1} = 0$. Они образуют проективное пространство $\mathbb{R}P^{n-1}$. □

Утверждение 1.2. *Проективная прямая $\mathbb{R}P^1$ и окружность S^1 гомеоморфны.*

Доказательство 1. Рассмотрим окружность, заданную уравнением $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Прямая ℓ_0, заданная уравнением $x = 0$, пересекает ее (точнее, касается) в единственной точке $(x, y) = (0, 0)$. Если прямая ℓ проходит через начало координат и не совпадает с ℓ_0, то она пересекает эту окружность в двух точках: в начале координат и еще в одной точке $A(\ell)$. Полагая $A(\ell_0) = (0, 0)$, получим взаимно однозначное соответствие A между проективной прямой $\mathbb{R}P^1$ и окружностью S^1. $\square$

Доказательство 2. Сопоставим каждой прямой в $\mathbb{R}^2$, проходящей через начало координат, угол φ, который она образует с осью абсцисс. Угол φ однозначно определяет прямую ℓ_φ и, в свою очередь, определяется ею однозначно. Очевидно, $0 \leqslant \varphi < \pi$, причем если $\varphi \to \pi$, то $\ell_\varphi \to \ell_0$. Поэтому проективная прямая $\mathbb{R}P^1$ гомеоморфна отрезку $[0, \pi]$, концы которого склеены — это и есть окружность S^1. $\square$

Доказательство 3. Каждой точке $[x_0 : x_1] \in \mathbb{R}P^1$ с $x_1 \neq 0$ (т. е. произвольной точке, отличной от $[1:0]$) сопоставим элемент множества $\mathbb{R}^1$ — действительное число x_0/x_1. Каждой точке b окружности S^1, отличной от некоторой заранее заданной точки a, сопоставим центральную проекцию точки b из точки a на прямую, касающуюся окружности в точке, диаметрально противоположной a.

Таким образом, проективная прямая $\mathbb{R}P^1$ с выколотой точкой и окружность S^1 с выколотой точкой гомеоморфны прямой и, следовательно, друг другу. Доопределим гомеоморфизм в выколотой точке, полагая, что точка $[1:0] \in \mathbb{R}P^1$ переходит в $a \in S^1$. Чтобы убедиться, что у нас по-прежнему получился гомеоморфизм, рассмотрим малые окрестности точек $[1:0]$ и a. В случае $[1:0] \in \mathbb{R}P^1$ окрестность состоит из точек вида $[1:b]$, где $|b| < \varepsilon$. На прямой этому соответствуют точки вида $1/b$, т. е. все точки $x \in \mathbb{R}$, $|x| > 1/\varepsilon$. В то же самое множество проектируется малая окрестность точки $a \in S^1$. $\square$

Утверждение 1.3. *Проективная плоскость $\mathbb{R}P^2$ не гомеоморфна сфере S^2.*

Объяснение (не доказательство)! 1. Рассмотрим $\mathbb{R}P^2$ как круг, диаметрально противоположные точки границы которого отождествлены, и нарисуем в этом круге диаметр. Он представляет собой замкнутую несамопересекающуюся кривую в $\mathbb{R}P^2$, при удалении которой проективная плоскость $\mathbb{R}P^2$ остается связной (не распадается на куски). Можно показать, что на сфере S^2 такой кривой не существует. $\square$

Объяснение (не доказательство)! 2. Согласно пункту (5) утверждения 1.1, проективная плоскость $\mathbb{R}P^2$ представляет собой объединение обычной плоскости $\mathbb{R}^2$ и «бесконечно удаленной проективной прямой» $\mathbb{R}P^1$. Нарисуем на проективной плоскости букву P, разместив ее так, чтобы она целиком лежала в $\mathbb{R}^2$. Затем будем двигать ее так, чтобы она целиком прошла через бесконечно удаленную прямую и вернулась на прежнее место. Нетрудно увидеть (проверьте!), что при этом буква P превратится в букву Ь. Коротко возможность такого превращения выражают словами «проективная плоскость не ориентируема». Сфера S^2 ориентируема — на ней такое невозможно. $\square$

Комплексным проективным пространством размерности n (обозначение $\mathbb{C}P^n$) называется множество комплексных прямых (одномерных комплексных подпространств), проходящих через начало координат, в комплексном линейном пространстве $\mathbb{C}^{n+1}$ размерности $n+1$. Аналогично утверждению 1.1 можно доказать, что множество $\mathbb{C}P^n$ гомеоморфно множеству наборов $\{[x_0 : x_1 : \ldots : x_n]\}$, где хотя бы одно $x_i \in \mathbb{C}$ отлично от нуля, и два набора $\{[x_0 : x_1 : \ldots : x_n]\}$ и $\{[y_0 : y_1 : \ldots : y_n]\}$ отождествлены, если существует ненулевое число $\lambda \in \mathbb{C}$ такое, что $y_0 = \lambda x_0$, $y_1 = \lambda x_1$, $\ldots$, $y_n = \lambda x_n$.

Утверждение 1.4. *Комплексная проективная прямая* $\mathbb{C}P^1$ *гомеоморфна сфере* S^2.

Доказательство является точной копией доказательства 3 утверждения 1.2.

2. *Основное утверждение и его первое доказательство*

Движением линейного пространства $\mathbb{R}^n$ называется отображение его в себя, сохраняющее расстояние между точками: $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\forall a, b \in \mathbb{R}^n$ $\rho(f(a), f(b)) = \rho(a, b)$.

Утверждение 2.1. *Всякое движение линейного пространства либо сохраняет ориентацию, либо представимо в виде композиции* $S \circ f$, *где* S — *симметрия относительно гиперплоскости* $x_1 = 0$ ($x_1, \ldots, x_n$ — *какой-нибудь фиксированный набор координат в* $\mathbb{R}^n$), *а* f — *движение, сохраняющее ориентацию.*

Доказательство. Пусть движение g меняет ориентацию. Рассмотрим преобразование $f = S \circ g$. Тогда $g = S \circ S \circ g = S \circ f$, и f — движение, сохраняющее ориентацию. $\square$

Утверждение 2.2. *Всякое движение линейного пространства представляется в виде* $T \circ f$, *где* T — *параллельный перенос, а* f — *движение, переводящее начало координат* O *в себя.*

Доказательство. Пусть g — движение. Возьмем в качестве T параллельный перенос на вектор $v = \overrightarrow{O, g(O)}$, и положим по определению

$f = T^{-1} \circ g$. Тогда $g = T \circ f$, а преобразование f — движение, оставляющее на месте начало координат. □

Множество параллельных переносов пространства $\mathbb{R}^n$ устроено так же, как само пространство $\mathbb{R}^n$ — каждому вектору отвечает параллельный перенос — и поэтому геометрически малоинтересно. Нетривиальная геометрия множества движений «сосредоточена» в множестве движений, сохраняющих ориентацию и переводящих начало координат в себя. Это множество обозначается $\mathrm{SO}(n)$. Сопоставив каждой точке $a \in \mathbb{R}^n$ ее радиус-вектор $\overrightarrow{O, a}$, мы можем рассматривать элементы $\mathrm{SO}(n)$ как отображения множества векторов в себя.

Утверждение 2.3. *Преобразования $f \in \mathrm{SO}(n)$ линейны: $f(\alpha v) = \alpha f(v)$, и $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$, где $v, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ — произвольные векторы, а $\alpha \in \mathbb{R}$ — произвольное число.*

Доказательство. Движения пространства переводят прямые в прямые. Три точки — начало координат O, конец P вектора v и конец Q вектора αv — лежат на одной прямой, причем расстояние от O до Q в α раз больше, чем расстояние от O до P. Теми же свойствами обладают и точки O, F, G, где F — конец вектора $f(v)$, а G — конец вектора $f(\alpha v)$. Отсюда следует, что $f(\alpha v) = \pm\alpha f(v)$. Доказательство того, что знак здесь на самом деле «плюс» — несложное упражнение.

Доказательство того, что сумма векторов переходит в сумму, производится аналогично и использует тот факт, что движения переводят параллельные прямые в параллельные. □

Утверждение 2.4. *Множество $\mathrm{SO}(2)$ гомеоморфно окружности и представляет собой множество всех поворотов плоскости относительно начала координат.*

Доказательство. Пусть $f \in \mathrm{SO}(2)$, и $a \in \mathbb{R}^2$ — произвольная точка, отличная от начала координат. Докажем, что образ $f(a)$ точки a определяет преобразование f полностью. Действительно, пусть $b \in \mathbb{R}^2$ — произвольная точка плоскости. Тогда треугольник $O, f(a), f(b)$ равен треугольнику O, a, b и имеет ту же ориентацию. Легко заметить, что это условие однозначно задает точку $f(b)$, если точки a, b и $f(a)$ известны.

Рассмотрим теперь поворот относительно начала координат, переводящий точку a в точку $f(a)$ (нетрудно убедиться, что такой поворот существует). По только что доказанному, этот поворот переводит произвольную точку b в точку $f(b)$ — т. е. совпадает с преобразованием f.

Возьмем в качестве точки a точку с координатами $(1, 0)$. Тогда образ $f(a)$ — произвольная точка окружности S^1 единичного радиуса с центром в начале координат. Мы знаем, что точка $f(a)$ определяет преобразование f полностью. Поэтому соответствие $f \mapsto f(a)$ определяет гомеоморфизм $\mathrm{SO}(2) \to S^1$. □

Тройки u_1, u_2, u_3 некомпланарных (не лежащих в одной плоскости) векторов в пространстве $\mathbb{R}^3$ можно разделить на два класса — «правые» и «левые». Тройка называется правой, если можно направить большой палец правой руки вдоль вектора u_1, указательный — вдоль вектора u_2 и средний — вдоль вектора u_3, и при этом пальцы не будут перекрещены. Если этого сделать нельзя (а можно — большим, указательным и средним пальцем *левой* руки), то тройка называется левой. Правую тройку векторов нельзя продеформировать в левую так, чтобы в процессе деформации векторы все время были некомпланарны.

Пусть u_1, u_2, u_3 — три вектора в $\mathbb{R}^3$. Определим функцию $\mathrm{vol}(u_1, u_2, u_3)$ как объем параллелепипеда, натянутого на векторы u_1, u_2, u_3, в случае, когда эти векторы образуют правую тройку, и как объем, взятый со знаком «минус», если тройка векторов u_1, u_2, u_3 — левая. Если векторы компланарны, то $\mathrm{vol}(u_1, u_2, u_3) = 0$.

Утверждение 2.5. *Функция* vol *меняет знак при перестановке любых двух своих аргументов. Она линейна по первому* (*и, следовательно, по каждому*) *своему аргументу при фиксированных остальных*:

1) $\mathrm{vol}(u_1 + u_1', u_2, u_3) = \mathrm{vol}(u_1, u_2, u_3) + \mathrm{vol}(u_1', u_2, u_3)$;

2) $\mathrm{vol}(\alpha u_1, u_2, u_3) = \alpha\,\mathrm{vol}(u_1, u_2, u_3)$.

Доказательство. При перестановке двух векторов правая тройка переходит в левую и наоборот, поэтому функция vol меняет знак.

При умножении первого вектора на α высота параллелепипеда изменяется в $|\alpha|$ раз, основание не меняется. Ориентация сохраняется, если $\alpha > 0$, и меняется, если $\alpha < 0$. Это доказывает пункт 2. Доказательство пункта 1 — упражнение. □

Утверждение 2.6. *Всякое движение* $f \in \mathrm{SO}(3)$ *имеет неподвижный вектор, т. е.* $\exists v \neq 0$: $f(v) = v$.

Доказательство. Будем последовательно переформулировать требуемое утверждение.

Формулировка 1: существуют число $\lambda > 0$ и вектор $v \neq 0$ такие, что $f(v) = \lambda v$. Действительно, поскольку f — движение, $|f(v)| = |v| \Rightarrow |\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = 1$.

Формулировка 2: существует число $\lambda > 0$ такое, что образ преобразования g_λ, определенного равенством $g_\lambda(v) = f(v) - \lambda v$, не совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^3$, а лежит в некоторой плоскости. Действительно, пусть найдется вектор $v \neq 0$ такой, что $g_\lambda(v) = 0$ (это эквивалентно предыдущей формулировке). Возьмем векторы a_1, a_2 так, чтобы тройка a_1, a_2, v являлась базисом. Преобразование f — линейное в силу утверждения 2.3, следовательно, преобразование g_λ тоже линейное. Поэтому образ произвольного вектора $u = xv + x_1a_1 + x_2a_2$ равен $x_1g_\lambda(a_1) + x_2g_\lambda(a_2)$, т. е. лежит в плоскости, порожденной векторами $g_\lambda(a_1)$ и $g_\lambda(a_2)$. Обратно, пусть образ преобразования g_λ лежит в некоторой плоскости. Возьмем в пространстве $\mathbb{R}^3$ базис a_1, a_2, a_3. Векторы $g_\lambda(a_1)$, $g_\lambda(a_2)$, $g_\lambda(a_3)$ лежат в одной плоскости, поэтому существуют числа x_1, x_2, x_3, не все равные нулю и такие, что $x_1g_\lambda(a_1) + x_2g_\lambda(a_2) + x_3g_\lambda(a_3) = 0$. Тогда $v = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3$ — ненулевой вектор, и $g_\lambda(v) = 0$.

Формулировка 3: зафиксируем в пространстве $\mathbb{R}^3$ базис a_1, a_2, a_3, состоящий из векторов единичной длины, попарно перпендикулярных друг другу. Тогда найдется число $\lambda > 0$ такое, что $\mathrm{vol}(g_\lambda(a_1), g_\lambda(a_2), g_\lambda(a_3)) = 0$. Действительно, это означает, что векторы $g_\lambda(a_1)$, $g_\lambda(a_2)$, $g_\lambda(a_3)$ лежат в одной плоскости, откуда следует (a_1, a_2, a_3 — базис!), что образ преобразования g_λ тоже лежит в этой плоскости и не совпадает со всем пространством.

Применим теперь утверждение 2.5. Из него следует, что функция $p(\lambda) = \mathrm{vol}(g_\lambda(a_1), g_\lambda(a_2), g_\lambda(a_3)) = \mathrm{vol}(f(a_1) - \lambda a_1, f(a_2) - \lambda a_2, f(a_3) - \lambda a_3)$ является многочленом степени 3 вида $p(\lambda) = p_3\lambda^3 + p_2\lambda^2 + p_1\lambda + p_0$. При этом $p_3 = -\mathrm{vol}(a_1, a_2, a_3) = -1$, поскольку векторы a_1, a_2, a_3 имеют единичную длину, попарно перпендикулярны друг другу и образуют правую тройку, и $p_0 = \mathrm{vol}(f(a_1), f(a_2), f(a_3)) = 1$, поскольку векторы $f(a_1)$, $f(a_2)$, $f(a_3)$ обладают теми же свойствами. Поэтому $p(0) = 1 > 0$ и $p(\lambda) < 0$ при очень больших положительных λ. Отсюда следует, что уравнение $p(\lambda) = 0$ имеет положительный корень. □

Утверждение 2.7. *Любое преобразование $f \in \mathrm{SO}(3)$ является поворотом вокруг некоторой оси в пространстве $\mathbb{R}^3$.*

Доказательство. Согласно утверждению 2.6, преобразование f имеет неподвижный вектор: $f(v) = v$. Отсюда следует, что все точки прямой, содержащей вектор v, остаются неподвижными: $f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha v$. Эта прямая и есть ось вращения.

Точки плоскости Π, проходящей через начало координат и перпендикулярной вектору v, переходят при преобразовании f в точки той же плоскости (поскольку движения переводят перпендикулярные векторы в перпендикулярные). Поэтому можно рассмотреть ограничение преобразования f на плоскость Π. Это ограничение принадлежит множеству $SO(2)$ и, следовательно, в силу утверждения 2.4, является поворотом на некоторый угол φ.

Рассмотрим теперь произвольный вектор $u \in \mathbb{R}^3$. Его можно однозначно представить в виде $u = \alpha v + w$, где $w \in \Pi$. Тогда $f(u) = \alpha v + f(w)$. Отсюда следует, что плоскость, образованная векторами v и $f(u)$, образует угол φ с плоскостью, образованной векторами v и u. Следовательно, преобразование f — поворот на угол φ вокруг прямой, содержащей вектор v. □

Основное утверждение. *Множество* $SO(3)$ *гомеоморфно проективному пространству* $\mathbb{R}P^3$.

Доказательство. Произвольное преобразование $f \in SO(3)$ является вращением вокруг некоторой оси; сопоставим ему ориентированную ось ℓ и угол поворота φ. Поскольку ось ℓ ориентирована, то можно считать, что она задается вектором единичной длины в $\mathbb{R}^3$, т. е. точкой единичной сферы, а поворот производится против часовой стрелки, и угол φ заключен между 0 и π. Таким образом, мы поставили в соответствие каждой точке сферического слоя $S^2 \times [0, \pi]$ преобразование $f \in SO(3)$.

Для того, чтобы это соответствие было взаимно однозначным, нужно сделать два отождествления. Во-первых, все повороты на угол 0 с различными осями совпадают — это тождественное преобразование. Таким образом, нужно склеить все точки вида $(v, 0)$, $v \in S^2$ — при этом сферический слой заменится трехмерным шаром. Во-вторых, поворот на угол π относительно некоторой ориентированной оси и поворот на угол π относительно той же оси с противоположной ориентацией совпадают. Поэтому в полученном шаре нужно отождествить между собой диаметрально противоположные точки его граничной сферы. Такое отождествление, согласно утверждению 1.1, дает трехмерное проективное пространство $\mathbb{R}P^3$. □

3. *Второе доказательство основного утверждения*

Утверждение 3.1. *Множество* $SO(3)$ *гомеоморфно множеству пар перпендикулярных друг другу векторов единичной длины в пространстве* $\mathbb{R}^3$, *а также множеству пар* (a, v), *где* a *— точка двумерной сферы,* v *— ненулевой вектор, касательный к сфере в точке* a, *причем две пары* (a, v_1) *и* (a, v_2) *отождествляются, если* $v_2 = \lambda v_1$ *для некоторого числа* $\lambda > 0$.

Доказательство. Возьмем в пространстве $\mathbb{R}^3$ базис a_1, a_2, a_3, векторы которого имеют единичную длину, попарно перпендикулярны и образуют правую тройку. Пусть $b_i = f(a_i)$ $(i = 1, 2, 3)$, где $f \in \mathrm{SO}(3)$. Тогда b_1, b_2, b_3 — базис в пространстве $\mathbb{R}^3$ с теми же свойствами. Поскольку преобразование f линейно, то оно полностью определяется базисом b_1, b_2, b_3, откуда следует, что множество $\mathrm{SO}(3)$ гомеоморфно множеству таких базисов. Заметим теперь, что вектор b_3 однозначно определяется векторами b_1 и b_2, откуда следует первое утверждение.

Для доказательства второго утверждения положим $a = b_1$, $v = b_2$. Тогда вектор v касается единичной сферы в точке a (поскольку $|a| = 1$ и v перпендикулярен a), а эквивалентность векторов, отличающихся положительными множителями, позволяет заменить условие $|v| = 1$ на условие $v \neq 0$. $\square$

Рассмотрим теперь точку $a \in S^2$ и всевозможные гладкие кривые $\gamma(t) \subset S^2$ такие, что $\gamma(0) = a$ — то есть, всевозможные траектории движения точки по сфере такие, что в начальный момент времени точка совпадает с a. Нетрудно видеть, что вектор скорости $\gamma'(0)$ касается сферы в точке a.

Две такие кривые $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$ назовем эквивалентными (обозначение $\gamma_1 \sim \gamma_2$), если расстояние $r(t)$ между точками $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$ стремится к нулю при $t \to 0$ быстрее, чем t: $\lim\limits_{t\to 0} r(t)/t = 0$. Нетрудно видеть, что $\gamma_1 \sim \gamma_2$ тогда и только тогда, когда $\gamma_1'(0) = \gamma_2'(0)$ — две траектории эквивалентны тогда и только тогда, когда скорости движения в начальный момент совпадают. Поэтому множество пар (a, v) из утверждения 3.1 можно заменить на множество пар (a, γ), где $a \in S^2$, $\gamma \subset S^2$ — гладкая кривая, $\gamma(0) = a$, и (a, γ_1) отождествляется с (a, γ_2), если $\gamma_1 \sim \gamma_2$.

Реализуем теперь сферу S^2 как комплексную проективную прямую $\mathbb{C}P^1$. Задача теперь состоит в том, как описать скорость движения точки $\gamma(t) \in \mathbb{C}P^1$ в момент времени $t = 0$.

Точка $\gamma(t) \in \mathbb{C}P^1$ — это комплексная прямая (одномерное комплексное подпространство) в двумерном комплексном линейном пространстве $\mathbb{C}^2$. Чтобы описать скорость движения, зафиксируем сначала в каждой прямой $\gamma(t)$ точку $e(t) \neq 0$. Ясно, что вектор $e'(0) \in \mathbb{C}^2$ задает однозначно скорость движения прямой $\gamma(t)$ при $t = 0$, но не наоборот — точку $e(t) \in \gamma(t)$ можно выбрать по-разному, и это даст, вообще говоря, разные векторы $e'(0)$. Два разных выбора вектора $e(t) \in \gamma(t)$ могут отличаться умножением на ненулевое комплексное число, зависящее от t: $\tilde{e}(t) = \lambda(t)e(t)$. При этом вектор $e'(0)$ заменяется на вектор $\tilde{e}'(0) = \lambda'(0)e(0) + \lambda(0)e'(0)$ —

и такие векторы соответствуют одной и той же скорости движения прямой $\gamma(t)$ в момент времени $t = 0$.

Зафиксируем теперь в пространстве $\mathbb{C}^2$ комплекснозначную функцию двух аргументов $\Delta((z_1, w_1), (z_2, w_2)) = z_1 w_2 - z_2 w_1$ (здесь (z_1, w_1), $(z_2, w_2) \in \mathbb{C}^2$, т. е. z_1, w_1, z_2, w_2 — комплексные числа). Зафиксируем прямую $a \subset \mathbb{C}^2$, а в ней точку $u \in a$. Для каждой траектории $\gamma(t) \subset \mathbb{C}P^1$ такой, что $\gamma(0) = a$, выберем в каждой прямой $\gamma(t)$ по ненулевому вектору $e(t)$ так, чтобы $e(0) = u$. Определим функцию $\mu\colon a \to \mathbb{C}$ равенством $\mu(u) = \Delta(u, e'(0))$.

Утверждение 3.2. *Функция* μ *квадратична*: $\mu(qu) = q^2\mu(u)$ *для всякого* $u \in a$, $q \in \mathbb{C}$. *Она определяется только скоростью движения траектории* $\gamma(t)$ *при* $t = 0$ *и не зависит от выбора вектора* $e(t) \in \gamma(t)$, *а также от иных, помимо скорости, параметров траектории. И наоборот, произвольная квадратичная функция на прямой* $a = \gamma(0)$ *однозначно задает мгновенную скорость движения этой прямой при* $t = 0$.

Доказательство. Докажем сначала независимость от выбора вектора $e(t) \in \gamma(t)$. Пусть $\tilde{e}(t) \in \gamma(t)$ — другой выбор. Тогда, как мы уже отмечали, $\tilde{e}(t) = \lambda(t)e(t)$ и, поскольку $\tilde{e}(0) = e(0) = u$, имеет место равенство $\lambda(0) = 1$. Тогда $\Delta(u, \tilde{e}'(0)) = \Delta(u, e'(0) + \lambda'(0)u) = \Delta(u, e'(0)) = \mu(u)$.

Квадратичность функции μ доказывается аналогично: пусть $q \in \mathbb{C}$. Тогда выберем в качестве $\tilde{e}(t)$ вектор $qe(t)$ (так чтобы $\tilde{e}(0) = qu$ — нам это нужно, поскольку мы хотим вычислить функцию μ в точке qu) и получим $\mu(qu) = \Delta(qu, qe'(0)) = q^2\Delta(u, e'(0)) = q^2\mu(u)$.

Поскольку в определение функции $\mu(u)$ входят только первые производные при $t = 0$, получается, что $\mu_1(u) = \mu_2(u)$, если скорости движения точек $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$ на проективной прямой $\mathbb{C}P^1$ в момент времени $t = 0$ совпадают. Таким образом, функция μ зависит только от *скорости* движения в момент времени $t = 0$. Обратно, произвольная квадратичная функция определяет скорость. Действительно, равенство $\mu(u) = \Delta(u, e'(0))$ (в котором u и $\mu(u)$ известны) определяет вектор $e'(0)$ однозначно с точностью до прибавления вектора, кратного u (проверьте!). Нетрудно увидеть, что задание вектора $e'(0)$ с такой точностью задает траекторию $e(t) \subset \mathbb{C}^2$ с точностью до эквивалентности и умножения на ненулевую функцию $\lambda(t)$. Тем самым траектория $\gamma(t) \subset \mathbb{C}P^1$ задана с точностью до эквивалентности, что и требовалось доказать. □

Второе доказательство основного утверждения. Из утверждений 3.1 и 3.2 следует, что множество $SO(3)$ гомеоморфно множеству пар (a, μ), где $a \in \mathbb{C}P^1$, т. е. является комплексной прямой в $\mathbb{C}^2$, а

$\mu\colon a \to \mathbb{C}$ — ненулевая квадратичная функция, причем две квадратичные функции отождествляются, если они отличаются умножением на положительное вещественное число. Рассмотрим векторы $u \in a$ такие, что $\mu(u) = 1$. Этих векторов два, они отличаются знаком: $\mu(u) = \mu(-u) = 1$. Задание пары векторов $(u, -u)$ с таким свойством полностью определяет квадратичную функцию μ: если $v \in a$ — произвольный вектор, то существует и единственно число $\alpha \in \mathbb{C}$ такое, что $v = \alpha u$ (поскольку a — комплексная прямая, т.е. *одномерное* комплексное пространство). Но тогда $\mu(v) = \alpha^2$ определено однозначно. Умножение квадратичной функции μ на положительное число λ соответствует умножению векторов u и $-u$ на число $1/\sqrt{\lambda}$. Если λ пробегает множество всех положительных чисел, пара точек $(u, -u)$ пробегает некоторую *вещественную* прямую ℓ, лежащую в комплексной прямой a.

Таким образом, мы доказали, что множество $\mathrm{SO}(3)$ гомеоморфно множеству пар (a, ℓ), где $a \subset \mathbb{C}^2$ — комплексная прямая, а $\ell \subset a$ — лежащая на ней вещественная прямая. Заметим теперь, что задание вещественной прямой $\ell \subset \mathbb{C}^2$ однозначно задает содержащую ее комплексную прямую a. Действительно, если $v \in \ell$ — произвольный ненулевой вектор, то прямая a состоит из всех векторов вида αv, где α — произвольное *комплексное* число. Таким образом, множество $\mathrm{SO}(3)$ гомеоморфно множеству вещественных прямых в линейном пространстве $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ (поскольку речь идет о вещественных прямых, комплексная структура не важна, и мы можем просто отождествить $\mathbb{C}^2$ с $\mathbb{R}^4$), т.е. гомеоморфно проективному пространству $\mathbb{R}P^3$. □

Задача. *Чему соответствуют при отождествлении* $\mathrm{SO}(3)$ *и* $\mathbb{R}P^3$*, описанном во втором доказательстве, проективные подпространства — прямые и плоскости — пространства* $\mathbb{R}P^3$*? Напомним, что проективная прямая в* $\mathbb{R}P^3$ *— это множество прямых в* $\mathbb{R}^4$*, проходящих через начало координат и лежащих в определенной плоскости, а проективная плоскость — множество прямых, лежащих в определенном трехмерном подпространстве.*

Юрий Михайлович Бурман

О проективных пространствах и движениях,
или геометрия без рисунков

Редактор К. Коршунов
Серийное оформление обложки разработал М. Панов.

Издательство Московского Центра
непрерывного математического образования

Лицензия ИД №01335 от 24.03.2000 г.

Подписано в печать 5.12.2001 г. Формат 60×88 $^1/_{16}$. Бумага офсетная №1.
Печать офсетная. Печ. л. 1,0 Тираж 1000 экз. Заказ №7870.

МЦНМО
121002, Москва, Большой Власьевский пер., 11

Отпечатано с готовых диапозитивов
в Производственно-издательском комбинате ВИНИТИ.
140010, г. Люберцы Московской обл., Октябрьский пр-т, 403.
Тел. 554–21–86.

ISBN 5-94057-010-0

9 785940 570103 >