Парадоксы теории вероятностей

Какие бывают случайности? (Первый семинар).

Задача 1.1. (**Игра в кости, уровень** A)
Правильная игральная кость падает при бросании с равными шансами на любую из граней $1, 2, 3, 4, 5$ или 6.
а) С какой вероятностью кость, брошенная дважды, по крайней мере один раз выпадет четным числом?
б) Бросаются две кости и вычисляется сумма выпавших очков. Какая сумма будет встречаться чаще — 9 или 10? А если бросаются три кости?
в) Вероятность какого события больше:
$A = \{$ при четырех бросаниях одной кости по крайней мере один раз выпадет "1" $\}$,
$B = \{$ при 24 бросаниях двух костей по крайней мере один раз выпадут одновременно две "1" $\}$?
Какое минимальное число раз надо подбросить три кости, чтобы вероятность выпадения трех "1" одновременно была больше $\frac{1}{2}$?
г) Какое из событий более вероятно:
$A = \{$ появление хотя бы одной шестерки при подбрасывании 6 костей $\}$,
$B = \{$ появление хотя бы двух шестерок при подбрасывании 12 костей $\}$,
$C = \{$ появление не менее трех шестерок при бросании 18 костей $\}$?

Задача 1.2. (**Раздел шкуры неубитого медведя, уровень** B)
Жили-были два помещика. Как-то раз повадился местный медведь таскать у них овец. Овцы одинаково вкусные, поэтому мишка за следующей овцой с равной вероятностью приходит к каждому из помещиков. Помещики договорились, что тот, кто первым потеряет шестую овцу, теряет также и свое терпение, убивает медведя и в качестве компенсации забирает себе шкуру.
а) А теперь они сидят и думают: вдруг случится так, что мишка, съев 5 овец одного помещика и 3 овцы другого, сломает себе шею в пограничной канаве. Как тогда разделить шкуру по справедливости?
б) А если после несчастного случая с мишкой первому помещику до потери терпения осталось еще поплатиться n овцами, а второму — m?

Задача 1.3. (**Обмен подарками, уровень** C)
а) Пять друзей-мехматян решили одарить друг друга следующим образом: подарки складываются вместе, перемешиваются и каждому достается один случайный подарок. Верно ли, что вероятность по крайней мере одного совпадения (т.е. получения кем-то собственного подарка) больше вероятности того, что совпадений нет?
б) Если p_n — вероятность хотя бы одного совпадения при распределении подарков среди n человек, то чему равен $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$?
в) Пусть теперь число людей (n) не совпадает с числом подарков (m) и каждый человек может получить любой подарок равновероятно. В частности, одному мехматянину может достаться несколько подарков. Если q_n — вероятность того, что определенный человек получит ровно k подарков, и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{m}{n} = \lambda$, то чему равен $\lim\limits_{n\to\infty} q_n$?

Задача 1.4. (**Совпадение дней рождений, уровень** C)
а) Вы задались целью найти на мех-мате студента, день рождения которого совпадает с Вашим. Сколько человек придется опросить, чтобы вероятность встречи успеха была больше $\frac{1}{2}$?
б) При каком минимальном количестве студентов в одной группе вероятность того, что хотя бы два из них родились в один и тот же день, больше $\frac{1}{2}$?
в) А сколько должно быть людей в группе, чтобы вероятность совпадения была 0.99?

Задача 1.5. (**Толстая монетка, уровень** A)
а) Найти отношение толщины толстой монетки к ее диаметру, при котором с равными вероятностями монетка падает на ребро, герб или решку?
б) Может ли в пункте а) получиться ответ $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{1}{2\sqrt{2}}$? Какие физические модели реальной монетки соответствуют каждому ответу?

Задача 1.6. (**Длина случайной хорды, уровень** B)
Для фиксированной окружности выбирается случайная хорда.
а) Найти вероятность того, что эта хорда будет длиннее стороны правильного треугольника, вписанного в окружность.
б) Может ли в пункте а) получиться ответ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$?
в) Как определить *случайную хорду* в пункте а), чтобы вероятность принимала любое значение из промежутка $(\frac{1}{2}, 1]$?

Дополнительные задачи.

Задача 1.7. (**Ящик с носками**) В ящике лежат синие и черные носки.
а) Известно, что синих носков 5, а черных — 7. Наудачу вытаскивают три носка. С какой вероятностью составится пара?
б) Если наудачу вытягиваются два носка, то вероятность того, что они оба синие, равна 0,5. Каково минимальное возможное число носков в ящике?
в) А если в пункте б) дополнительно известно, что число черных носков четно?

Задача 1.8. (**Геометрические вероятности**)
1) Два человека случайным образом приходят к памятнику Примусу от 0:00 часов до 1:00 часов по московскому времени и ждут друг друга по 15 минут. Какова вероятность того, что они встретятся?
2) К 300-летию Санкт-Петербурга было решено на прямой, соединяющей Москву и Питер, основать Мини-Диснейленд и Отель Болотный. С какой вероятностью Отель окажется ближе к Диснейленду, чем к Питеру, если места для постройки и Диснейленда, и Отеля выбираются случайным образом?
3) Поселок "Бермудский прямоугольник" разделен заборами на квадратные дачные участки со стороной 60 м. Найти вероятность того, что летающая тарелка радиуса 10 м, приземляющаяся в поселке случайным образом, не сломает забора.

Задача 1.9. (**Сумасшедшая старушка**)
Идет посадка на самолет. Зарегистрировалось ровно столько пассажиров, сколько кресел в самолете. Пассажиры входят по одному, каждый должен сесть на свое место. Но! Первой входит сумасшедшая старушка, которая садится на случайно выбранное место. Каждый следующий пассажир садится на свое место, если оно свободно, а иначе садится на произвольное место. Какова вероятность того, что последнему пассажиру останется его место?