Парадоксы теории вероятностей

Как распознать зависимые события? (Второй семинар).

Задача 2.1. (**Парадоксы престолонаследования, уровень** A)
а) При однократном бросании правильной монетки выпал орел. С какой вероятностью во второй раз опять выпадет орел?
б) Какова вероятность того, что при бросании монетки пять раз выпадет орел, а в шестой раз — решка?
в) Какова вероятность рождения наследника после четырех девочек?

Задача 2.2. (**Особенности национальной рыбалки, уровень** B)
Спозаранку выходя на рыбалку, 4 рыбака надевают в темноте резиновые сапоги. а) Каждый из них может отличить правый сапог от левого, но не может отличить свой сапог от чужого. Найти вероятность того, что каждый рыбак наденет свои сапоги.
б) Найти вероятность того, что каждый рыбак наденет сапоги, относящиеся к одной паре (может быть и не свои).
в) А какие ответы в пунктах а) и б), если рыбаки не могут отличить правый сапог от левого, и просто берут два первых попавшихся сапога?

Задача 2.3. (**Бесконечная орлянка, уровень** B)
Жили-были два помещика.
а) После дележа шкуры неубитого медведя они придумали новую игру: стали поочередно бросать золотой рубль. Выигрывает тот, у кого первого выпадет герб. Найти вероятность выигрыша для каждого из помещиков.
б) Какой будет ответ в пункте а), если выигрыш наступает только после выпадания второго герба?
в) Когда помещикам стало скучно, они усложнили правила игры в орлянку. При выпадении герба первый помещик получает от второго 1 копейку, иначе — первый отдает второму 1 копейку. Пусть начальный капитал первого помещика равен x копеек. Он ставит себе целью довести его до суммы $s > x$ копеек. Игра продолжается до тех пор, пока у первого помещика есть деньги, и он еще не набрал s копеек. Какова вероятность разорения первого помещика?
г) У помещиков собралась компания из N друзей. Они стреляют поочередно по одному стакану до первого попадания. Вероятность попасть в мишень для каждого из стрелков равна p_i ($i = 1, \dots, N$). Выигравшим считается тот, кто первым попадет в стакан. Определить вероятность того, что выиграет k-й стрелок. А если каждому стрелку дается по n патронов?

Задача 2.4. (**Дилемма игрока и заключенного, уровень** A)
а) Вы играете в "Поле Чудес" и получите приз, если угадаете, в каком из трех ящиков лежит приз. Вы указываете на один из ящиков, но перед тем как его открыть, ведущий открывает один из оставшихся ящиков и показывает, что там пусто. Затем Вам предлагают изменить свой выбор. Как Вам правильно действовать?
б) Двух из трех заключенных казнят. Все трое это знают, но не могут догадаться, кого помилуют. Один из заключенных просит охранника назвать имя одного из двух казнимых (причем знает, что охранник его имя не назовет). Когда он узнает имя, то понимает, что казнят уже одного из двух и считает, что его шансы возрастают до $\frac{1}{2}$. Прав ли этот заключенный?

Задача 2.5. (**Влияние джокера на карточную игру, уровень** A)
а) Из колоды в 52 карты вытаскивается одна. Зависимы ли события:
$A = \{$ вытащен туз $\}$, $B = \{$ вытащена карта красной масти $\}$?
б) Решить ту же задачу после добавления в колоду двух джокеров, каждый из которых не имеет цвета и не является тузом. Как можно количественно охарактеризовать зависимость двух событий?

Задача 2.6. (**Попарная независимость и корреляция, уровень** C)
а) Существуют ли события A_1, A_2, A_3, которые попарно независимы, но зависимы в совокупности?
б) Существуют ли такие $n \geq 4$ событий $A_1, \ldots, A_n$, что любые $n-1$ из них независимы в совокупности, но все n событий вместе зависимы? в) Существуют ли зависимые случайные величины с нулевой корреляцией?

Дополнительные задачи.

Задача 2.7. (**Оценки на экзамене**)
Группа студентов состоит из 5 отличников, 15 хорошистов и 5 троечников. Отличники на экзамене получают пятерку с вероятностью 1, хорошисты — пятерку или четверку равновероятно, а троечники — любую случайную оценку (пятерку, четверку или тройку).
а) Наугад выбирается студент. Чему равна вероятность, что он получит четверку или пятерку?
б) Случайно выбираются два студента. Найти вероятность того, что они получат пятерку и тройку (в любом порядке).

Задача 2.8. (**Выборки с перемешиванием, уровень** A)
а) Из полной колоды карт (52 штуки) вынимают сразу две карты.
Одну из них смотрят — она оказалась дамой. После этого две вынутые карты перемешивают, и из них наугад берут одну. С какой вероятностью эта карта окажется тузом?
б) Какой ответ будет в пункте а), если первая карта была не дамой, а тузом?
в) Как изменится ответ в пункте б) если изначально вынимают сразу $n < 52$ карт?

Задача 2.9. (**Спортлото-2003**)
а) Имеется n урн, в каждой из которых a белых шаров и b черных. Из первой урны во вторую перекладывается один шар; затем из второй в третью один шар и т.д. Затем из последней урны извлекается один шар. Найти вероятность того, что он белый.
б) Имеются две урны: в первой a белых шаров и b черных; во второй — c белых и d черных. Из первой урны во вторую перекладывается один шар. Шары перемешиваются и затем из второй урны в первую перекладывается один шар. После этого из первой урны берут наугад один шар. Найти вероятность того, что он будет белым.
в) Имеются две урны с черными и белыми шарами, причем число шаров (без учета цвета) в урнах одинаково. Из каждой урны случайным образом извлекаются $n \geq 3$ шаров с возвращением. Многократное повторение такого случайного эксперимента дало следующий результат: вероятность того, что из первой урны извлечены все белые шары, равна вероятности того, что из второй извлечены либо все белые, либо все черные шары. Можно ли по таким данным найти число n и содержимое обеих урн?