Парадоксы теории вероятностей

Насколько хорош прогноз, основанный на среднем числе успехов?
(Третий семинар).

Задача 3.1. (**Таблица Галлея, уровень** A)
а) По таблице Галлея (1693 год) средняя продолжительность жизни равна 26 годам и вместе с тем шансы умереть до 8 лет и прожить больше 8 лет равны. Как такое возможно?
б) Как изменятся результаты Галлея, если к исследуемой группе добавить Мафусаила (по преданию, прожившего 969 лет)?

Задача 3.2. (**С какой попытки сдается экзамен, уровень** A)
а) Сколько в среднем надо бросать кость до первого появления шестерки?
б) Вероятность сдачи экзамена равна p. Сколько в среднем понадобится попыток для сдачи экзамена?
в) Жили-были два помещика. Желая потренироваться перед охотой на местного медведя, помещики стреляют вишневыми косточками по стакану. Вероятность попадания равна p для каждого из помещиков. Дореволюционный стакан разбивается только после второго попадания. Сколько в среднем понадобится выстрелов для полного поражения стакана?

Задача 3.3. (**Санкт-Петербургский парадокс, уровень** B)
а) Игра состоит в бросании правильной монеты до тех пор, пока не выпадет решка. Если решка выпадает при r-том бросании, игрок получает от казино 2^r рублей. Сколько следует взять с игрока за участие в игре, чтобы казино получило доход?
б) Предположим, что ресурсы казино ограничены, т.е. оно может выплатить максимум миллион рублей. Какой тогда ответ будет в пункте а)?

Задача 3.4. (**Взвешивание монеток, уровень** B)
Проверяется на подлинность большое число N монет, каждая из которых может быть фальшивой (т.е. более легкой) с вероятностью p. Предлагается 2 способа проверки:
1) взвесить по одной все N монеток, сравнивая с эталонным весом подлинной монетки;
2) взвешивать монетки группами по $n > 1$ штук, сравнивая их общий вес с эталонным.
Определить, какой способ проверки требует меньшего числа взвешиваний. При каком n число взвешиваний будет в среднем наименьшим?

Задача 3.5. (**"Чистые" серии гербов и решек, уровень** C)
При подбрасывании кривой монетки герб выпадает с вероятностью p, а решка — с вероятностью $q = 1 - p$. Вся последовательность результатов многократного подбрасывания монетки распадается на идущие друг за другом "чистые серии", состоящие только из гербов или только из решек.
а) Найти среднюю ожидаемую длину первой серии.
б) Найти среднюю ожидаемую длину второй серии.
в) Найти среднюю ожидаемую длину каждой нечетной серии.
г) Зависит ли средняя ожидаемая длина каждой четной серии от кривизны монетки?.

Задача 3.6. (**Парадоксы случайного бизнеса, уровень** C)
а) Новенькая секретарша отправляет письма по n различным адресам, причем конверты с адресами выбираются случайным образом. Сколько писем в среднем попадет по назначению?
б) Бывает ли так, что среднее значение случайной величины, равной суммарному доходу от трех фирм, не определяется по индивидуальным распределениям доходов этих фирм?

Дополнительные задачи.

Задача 3.7. (**Случайный автобус**)
В автобусе едут n пассажиров. На следующей остановке каждый из пассажиров выходит с вероятностью p. Кроме того, в автобус с вероятностью p_0 не входит ни один новый пассажир, а с вероятностью $(1 - p_0)$ входит один новый пассажир.
а) Чему равно среднее ожидаемое число пассажиров в автобусе после одной остановки?
б) Сколько в среднем пассажиров зайдет в автобус за три остановки?
в) А сколько в среднем пассажиров выйдет из автобуса за две остановки?

Задача 3.8. (**Извлечение карты**)
а) Из хорошо перетасованной полной колоды в 52 карты извлекаются сверху карты до появления красной масти. Сколько карт в среднем при этом понадобится достать?
б) Из хорошо перетасованной полной колоды в 52 карты извлекаются сверху карты до появления туза. На каком месте в среднем появляется первый туз?
в) А на каком месте наиболее вероятно появится второй туз?

Задача 3.9. (**Хрупкий стержень**)
а) В лаборатории имеется несколько стеклянных трубок, каждая длиной в 9 см, помеченных с одного конца красной меткой, а с другого — синей. Споткнувшийся лаборант роняет эти трубки на пол, в результате чего многие из них разбиваются на три части. Какова для таких трубок средняя длина куска с синей меткой?
б) Лаборант сидит и думает: если он уронит хрупкие стержни и они расколются на две части, то какова будет средняя длина меньшего куска?
А среднее отношение длины короткого куска к длине длинного куска?
в) Стержень ломается случайным образом на три части. Найти средние длины короткого, среднего и длинного кусков.