Парадоксы теории вероятностей

Как играть, чтобы выиграть с наибольшей вероятностью?
(Четвертый семинар).

Задача 4.1. (**Игра с неравносильными противниками, уровень** A)
Чтобы подбодрить сына, делающего успехи в теннисе, отец обещает ему приз, если он выиграет подряд по крайней мере две теннисные партии против своего отца и клубного чемпиона по одной из схем: отец-чемпион-отец и чемпион-отец-чемпион. Чемпион игрет лучше отца. Какую схему следует выбрать сыну?

Задача 4.2. (**"Беспроигрышная" лотерея, уровень** A)
Устроители лотереи обещают, что играя по их правилам можно выиграть $(-2)^{n-1}$ рублей с вероятностью 2^{-n}, $n = 1, 2, \ldots$.
а) Можно ли так построить лотерею, выполняя все обещания, что средний доход организаторов будет сколь угодно большим?
б) Можно ли так построить лотерею, выполняя все обещания, что средний выигрыш игрока будет сколь угодно большим?

Задача 4.3. (**Игра с нетранзитивными стратегиями, уровень** B)
Жили-были два помещика. После развлечения с вишневыми косточками и дореволюционным стаканом они опять вернулись к подбрасыванию золотого рубля.
а) Иван Никифорович выигрывает, если серия герб-герб-решка выпадет раньше серии решка-герб-герб, иначе побеждает Иван Иванович. Каковы вероятности выигрыша для каждого?
б) После проигрыша в игре из пункта а), Иван Никифорович начинает ставить на серию решка-решка-герб (Иван Иванович ставит на свою старую серию). Каковы теперь будут вероятности выигрыша для каждого?
в) На этот раз в игре из пункта б) проигрывает Иван Иванович. Он выбирает новую серию герб-решка-решка. Какую из перечисленных выше серий стоит предпочесть Ивану Никифоровичу, чтобы не проиграть?

Задача 4.4. (**Как играть в проигрышную игру, уровень** B)
Жили-были два помещика. Долгая игра с золотым рублем привела к тому, что герб выпадает на нем с вероятностью $p = 0,45$, а решка —- с вероятностью $1-p = 0,55$. Увлекшиеся помещики продожают подбрасывать золотой рубль по очереди, причем число испытаний в одной игре всегда четно. Если у Ивана Никифоровича выпадает герб, он получает очко, иначе — ничего. Аналогично Иван Иванович получает очко, если на его ходе выпадает решка, в противном случае — ничего. Выигрывает тот, кто набирает больше очков в конце игры.
а) Сколько испытаний в игре стоит заказать Ивану Никифоровичу, чтобы вероятность его выигрыша была наибольшей?
б) Для какой вероятности p Ивану Никифоровичу наиболее выгодна игра только с двумя испытаниями?
в) Иван Иванович, поехав в город за новой английцкой каретой стоимостью в 40 рублей, через какое-то время обнаружил, что располагает суммой только в 20 рублей. Он решает попробовать выиграть недостающую сумму в новомодную рулетку согласно одной из двух стратегий: либо поставить все свои 20 рублей на "чет" и на этом закончить игру, либо ставить на "чет" по одному рублю до тех пор, пока он не выиграет или не проиграет 20 рублей. Какая из этих двух стратегий лучше?

Задача 4.5. (**Когда страхование выгодно и клиенту тоже, уровень** C)
Клиент, который владеет собственностью V, хочет застраховать ее от возможного неблагоприятного события, которое присходит ежегодно с вероятностью p. Ежегодный страховой взнос составляет qV $(0 < q < 1)$. Страхование выгодно компании, когда ожидаемая прибыль положительна, т.е. $q > p$.
а) При каком соотноошении q, p клинету выгодно застраховаться на 2 года?
б) А если клиент хочет застраховать собственность навечно?
в) Допустим, что клиент каждый год страхует только часть aV своей собственности. Как ведет себя промежуток приемлемых значений q при условиях пункта б), когда $a \to 0$.

Задача 4.6. (**Оптимальный выбор невесты, уровень** C)
Султан для испытания кандидата на пост придворного мудреца предлагает ему жениться на одной из 100 своих дочерей, имеющей наибольшее приданое. Кандидату будут представлять дочерей по очереди. При представлении каждой дочери сообщается ее приданое, а кандидат в мудрецы должен решить, подходит ли ему этот вариант. У него есть только один шанс принять или отвергнуть каждую дочь; вернуться к ранее отвергнутой он уже не сможет. а) Как должен действовать мудрец?
б) Как лучше действовать мудрецу, если доброжелатели сообщили ему, что приданое каждой дочери является случайной величиной, равномерно распределенной на отрезке $[0, 1]$?

Дополнительные задачи.

Задача 4.7. (**Случайное блуждание**)
а) Пьяница стоит на расстоянии одного шага от края пропасти. Он шагает случайным образом либо к краю утеса, либо от него. На каждом шагу вероятность отойти от края равна $2/3$, а шаг к краю утеса имеет вероятность $1/3$. Каковы шансы пьяницы избежать падения?
б) Игрок с начальным капиталом 1 рубль играет неограниченно долго против казино с бесконечным капиталом. Пусть игра безобидна (т.е. вероятность выигрыша равна $1/2$), и в каждом туре игрок может выиграть или проиграть 1 рубль. С какой вероятностью игрок не обанкротится? А если вероятность его выигрыша $2/3$?
в) Жили-были два помещика. Доигравшись с золотым рублем, они взялись за шашки. У помещика Ивана Никифоровича имеется 1 рубль, а у помещика Ивана Ивановича — 2 рубля. После каждой партии один из помещиков выигрывает у другого один рубль. Иван Никифорович более искусен, чем Иван Иванович, так что он выигрывает $2/3$ партий. Турнир продолжается до банкротства одного из игроков. Какова вероятность выигрыша Ивана Никифоровича?

Задача 4.8. (**Особенности игры вслепую**)
Жили-были два помещика. Побросав шашки, они стали учить писать числа соседского недоросля при помощи следующей игры. На лбу у каждого из помещиков недоросль пишет по одному из двух последовательных натуральных чисел. Помещик с меньшим числом проигрывает и должен заплатить другому сумму в копейках, равную числу, написанному на его собственном лбу. Выгодно ли помещикам играть в такую игру?