Топология алгебры и гидродинамика теории чисел.

В.И.Арнольд

Более подробное, чем в этих четырех лекциях, изложение, включающее большую часть материала лекций, содержится в следующих статьях автора:

[1] Динамическая система Ферма – Эйлера и статистика арифметики геометрических прогрессий, Функциональный анализ и его приложения, 2003, т. 37, № 1, стр. 1–20.

[2] Ergodic and arithmetical properties of geometrical progression dynamics and of its orbits, submitted to Moscow Mathematical Journal.

[3] Топология алгебры: комбинаторика операции возведения в квадрат. Функциональный анализ и его приложения, 2003, Т. 37, № 3, СТР. 1–24.

[4] Топология и статистика арифметических и алгебраических формул. Успехи математических наук, 2003, т. 58, № 4.

[5] Группы Эйлера и арифметика геометрических прогрессий. МЦНМО, 2003, 40 стр.

Ниже перечислено несколько задач, дополняющих четвертую лекцию; их особенностью является то, что успех в их решении (при достаточной настойчивости) кажется автору неизбежным, а ожидаемые результаты представляются более значительными, чем нужные для их получения усилия.

Речь идет об исследовании параметра стохастичности s некоторых последовательностей, отличных от геометрических прогрессий вычетов, о которых шла речь в лекциях. Прежде всего, вместо геометрических прогрессий можно взять арифметические. И уже первые экспериментальные результаты о поведении параметра стохастичности арифметических прогрессий обещают доставить интересную информацию о степени хаотичности этих последовательностей, которые трудно предсказать без эксперимента.

Напомню, что с последовательностью T вычетов по модулю n мы связываем определенные ниже параметры стохастичности R, r, s.

Пусть E вычетов делят целочисленную окружность длины n, $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, на T дуг длин $x_1, \ldots, x_T$ (так что $x_1 + \ldots + x_T = n, x_t \geqslant 0$).

Тогда мы составим характеризующие стохастичность множества параметры

$$R = \sum_{t=1}^{T} x_t^2, r = R/n^2, s = rT$$

(первая нормализация, деление на n^2, обезразмеривает квадраты длин, делая их независимыми от длины "окружности" n, а вторая, деление на $1/T = \min r$, позволяет сравнивать между собой стохастичности множеств разных мощностей T).

Бинормализованный параметр стохастичности s принимает значения $1 \leqslant s \leqslant T$. Наименьшее значение, $s_1 = 1$, называется казарменным (оно достигается на T дугах равной длины, и малые значения s наблюдается при взаимном отталкивании элементов множества друг другом).

Наибольшее значение, $s_1 = T$, называется кластерным (оно достигается на T совпадающих точках, и большие значения s наблюдаются при взаимном притяжении элементов множества друг другом).

Случайно выбираемые независимые точки доставляют в среднем значение параметра стохастичности $s_2 = 2T/(T+1)$. Это значение называется свободолюбивым, и близкие к 2 значения бинормализованного параметра стохастичности s наблюдаются при незначительном взаимодействии между элементами множества.

Задача состоит теперь в *исследовании реального поведения бинормализованного параметра стохастичности для арифметических прогрессий вычетов.*

Речь идет о следующих подмножествах T элементов целочисленной окружности $\mathbb{Z}_n$:

$$\{z_j = a + jb, a \in \mathbb{Z}_n, b \in \mathbb{Z}_n, 0 \leqslant < T\}.$$

Можно предполагать, что поведение бинормализованного параметра стохастичности s для арифметических прогрессий вычетов окажется различным в следующих двух случаях (которые оба заслуживают исследования).

1. прогрессия случайной длины T.

В этом случае рассматривается среднее арифметическое значение бинормализованного параметра стохастичности для отрезков прогрессии разных длин T (вероятно, при $T \ll n$).

Здесь представляет интерес и среднее значение, и распределение отклонений от него, причем как при фиксированных a и b, так и с усреднением по ним (и с изучением распределения уклонений при изменении значений a и b).

Предполагается, что на поведение параметра s можем влиять цепная дробь числа b/n, и что теорема Кузьмина о статистике элементов цепной дроби может оказаться полезной при осмысливании ожидаемых результатов экспериментов (каковые эксперименты, однако, можно провести и ничего об этой теореме не зная, просто варьируя b и n случайно или даже перебирая все значения пар (b, n) в некотором интервале).

2. Прогрессия подходящей длины.

Для цепной дроби

$$\frac{b}{n} = [0; b_1, b_2, \ldots]$$

рассмотрим подходящую дробь, оборвав цепную дробь на некотором месте

$$\frac{p_k}{q_k} = [0; b_1, b_2, \ldots, b_k].$$

Если в качестве длины отрезка прогрессии выбрать знаменатель q_k подходящей дроби, то члены этого отрезка прогрессии будут заполнять "окружность" вычетов $\mathbb{Z}_n$ более равномерно, чем при обрыве прогрессии в случайной точке T.

Поэтому поведение бинормализованного параметра стохастичности s при $T = q_k$ может оказаться сильно отличающимся от такового при случайном выборе значения T. Исследование асимптотического поведения s при больших n и k (и случайных b) может привести к новым асимптотикам (по сравнению со случаем, когда значение длины прогрессии T случайно).

Эти асимптотики тоже нужно было бы сравнить с теоремой Кузьмина об асимптотике статистики элементов цепной дроби случайного вещественного числа. Но и в этом случае эксперимент можно провести и не зная ничего об указанной теореме, и результаты такого эксперимента представляли бы независимый интерес.

3. Другие последовательности.

Кроме арифметических прогрессий, интересно рассмотреть и другие последовательности вычетов: параметр стохастичности s укажет на их отталкивание, притяжение или независимость.

В качестве напрашивающегося примера рассмотрим вычеты T последовательных простых чисел (по модулю n).

Например, можно взять последовательные сотни ($T = 100$) простых чисел и привести их по модулю $n = 100$ (рассмотреть лишь последние две цифры десятичной записи).

Такой эксперимент можно провести очень быстро, имея таблицу простых чисел. Вопрос о взаимном притяжении или отталкивании простых чисел можно сравнить с различными другими результатами о "хаотичности" распределения простых чисел. Но и эти эксперименты можно провести независимо от каких-либо теорий, причем наблюденные экспериментальные факты также будут интересны независимо от этих теорий (развитию которых они могут, однако, в будущем способствовать).