Задачи про перекладывания

А. И. Буфетов

Летняя школа в Дубне, 2003

1. Пусть дано перекладывание двух отрезков. Опишите индуцированное отражение на больший из них.

Теорема Оселедца-Кина

Пусть T — перекладывание m отрезков. Пусть $D = \{\beta_0, \beta_1, ..., \beta_{m-1}\}$-множество точек разрыва T, а $D_\infty = \{\cup T^k \beta_i, k \in Z, i = 0, ..., m-1\}$. Напомним, что точка $x \in [0, 1]$ называется периодической, если $T^k x = x$ при некотром $k \geqslant 1$.

2. Пусть перекладывание неминимально. Докажите, что есть инвариантное множество, являющееся объединением конечного числа интервалов.

3. Пусть у перекладывания нет периодических точек, а множество $A = [a_1, b_1) \sqcup \dots \sqcup [a_n, b_n)$ инвариантно. Докажите: $a_i, b_i \in D_\infty$

4. Пусть $T^k \beta_i = \beta_i \Rightarrow k = 0, i = j$. а) Докажите, что у перекладывания нет периодических точек. б) Докажите, что перекладывание минимально

Замечание: Перестановка всегда предполагается неприводимой.

5*. Пусть между длинами отрезков нет рациональных линейных отношений, кроме того, что сумма длин равна 1. Доказать, что перекладывание минимально.

6.Степень перекладывания есть перекладывание. Каких отрезков?

7.Пусть $T^k \beta_i = \beta_i \Rightarrow k = 0; i = j$. Пусть $\Delta_1, ..., \Delta_m$ — перекладываемые отрезки. Докажите $\lim_{n \longrightarrow \infty} \max_{i_1, i_2, ..., i_n} |\Delta_{i_1} \cap T\Delta_{i_2} \cap \dots \cap T^{n-1}\Delta_{i_n}| = 0$.

Индукция Rauzy

Рассмотрим неприводимую перестановку π. Пусть с помощью операции a из неё выходит π', с помощью b выходит π''. Рисуем: $\pi \xrightarrow{a} \pi'$, $\pi \xrightarrow{b} \pi''$. Далее из π' с помощью a выходит π'', и проч. Получаемый конечный граф и есть граф Rauzy.

8. Нарисуйте граф Rauzy перестановки

а)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

б)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$