ГЕОМЕТРИЯ И КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Ю.М.БУРМАН

1. Кинематика: положение механической системы

Множество положений механической системы может иметь разную геометрическую структуру.

Пример 1. Для свободной частицы множество ее положений это $\mathbb{R}^3$ (так, по крайней мере, принято считать ...), для системы из N частиц это $(\mathbb{R}^3)^N = \mathbb{R}^{3N}$.

Пример 2. Положение твердого тела в пространстве можно задать, припаяв к нему координатную систему из трех попарно перпендикулярных векторов единичной длины. Таким образом, множество положений твердого тела в пространстве это множество правоориентированных ортонормированных базисов в $\mathbb{R}^3$. Если в пространстве зафиксирован к тому же "стандартный" базис e_1, e_2, e_3, то положение произвольного базиса f_1, f_2, f_3 можно задать, просто выписав матрицу 3×3, составленную из координат векторов f_1, f_2, f_3 в базисе e_1, e_2, e_3. Векторы f_1, f_2, f_3 образуют правый ортонормированный базис тогда и только тогда, когда соответствующая матрица A ортогональна ($AA^T = 1$) и $\det A = 1$. Тем самым, множество положений твердого тела можно отождествить с группой $\mathrm{SO}(3)$.

Пример 3. У шарнирного механизма на рис. 1 все стержни имеют одинаковую длину, правый и левый концы стержней закреплены на плоскости, а шарниры могут свободно двигаться. Множество положений такого механизма представляет собой сферу с 4 ручками — докажите !

Пример 4. Множество положений жидкости, заполняющей область $U \subset \mathbb{R}^3$, можно описать так. Отметим в начальном положении каждую частичку жидкости — ей соответствует некоторая точка $u \in U$. В любом другом положении та же самая частичка попадает в точку $A(u) \in U$. Таким образом, положение

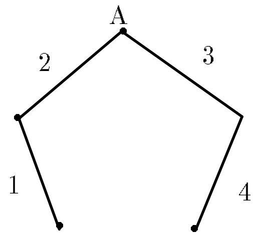

Figure 1. Множество положений этого шарнирного механизма — сфера с 4 ручками

частиц жидкости описывается непрерывным отображением $A : U \to U$. Поскольку две частицы попасть в одну и ту же точку не могут, то A должно быть взаимно однозначным. Обычно считают, что A — диффеоморфизм области, т.е. дифференцируемое отображение, обратное к которому тоже дифференцируемо. Таким образом, множество положений жидкости — группа диффеоморфизмов области U.

Во всех примерах, кроме "бесконечномерного" примера 4, положение механической системы можно задать конечным набором чисел. Сделать это можно по-разному: для примера 1 можно, например, взять произвольный базис в $\mathbb{R}^{3N}$ и задавать положение частиц координатами в этом базисе. В примере 2 можно задавать положение "подвижного" базиса тремя углами ϕ, θ, ψ. Здесь θ ("тангаж") — угол между вектором f_1 и плоскостью (e_1, e_2), ψ ("рысканье") — угол между проекцией f_1 на эту плоскость и вектором e_1, а ϕ ("крен") — угол между f_3 и плоскостью (e_1, e_3). В примере 3 положение системы можно задать углами, которые образуют шарниры 1 и 4 с осью абсцисс; при этом остаются обычно 2 возможных положения вершины A ("вверх" и "вниз"), и нужно указать, какое именно выбрать.

Отметим три характерных черты такого рода числового (координатного) описания. Во-первых, во всех приведенных выше случаях описание не единственно. Скажем, в примере 1 можно взять другой базис. В примере 2 вместо углов можно ϕ, θ, ψ задать тройку векторов f_1, f_2, f_3, указав x- и y-координаты вектора f_1 и z-координату вектора f_2. И так далее, примеры можно множить; при этом важно, что внутреннее устройство системы не позволяет (обычно) сказать, что один способ описания чем-то лучше другого.

Во-вторых, каждое координатное описание, как правило, применимо не ко всем положениям системы: у системы есть "исключительные" положения, в которых данный способ описания отказывает. Например, если тангаж равен $\pi/2$, то рысканье не определено, и углы ϕ, θ, ψ перестают описывать положение твердого тела. В примере 3 двух чисел ϕ_1, ϕ_4 недостаточно, требуется третий, дискретный параметр. Это означает, что ϕ_1, ϕ_4 задают не одну, а сразу две системы координат: одну для описания положений шарнирного механизма "вершиной A вверх", другое — "вершиной A вниз". Области определения этих двух систем координат не пересекаются. При этом есть особые положения, когда обе этих системы координат не работают: например, если $\phi_1 = \pi/3$, $\phi_4 = 2\pi/3$, то концы шарниров 1 и 4 совпадают, и вершина A может описывать окружность — для задания ее положения требуется еще одно число.

Выйти из этой ситуации можно, если рассматривать для каждой механической системы сразу несколько способов численного описания (несколько систем координат). Например, можно рассматривать сразу два набора углов ϕ, θ, ψ: один по отношению к стандартному базису e_1, e_2, e_3, а второй — по отношению к повернутому на $\pi/2$, например, e_3, e_1, e_2. Тогда каждое положение системы будет неособым по отношению по крайней мере к одной из двух систем, и в окрестности этого положения можно соответствующей системой и пользоваться. Для шарнирного механизма можно делать так же: рассмотреть, например, углы, образуемые с осью абсцисс шарнирами 1 и 2.

При этом для некоторых положений системы теперь можно пользоваться сразу несколькими системами координат. При этом возникают *отображения перехода*: если одна и то же положение системы имеет в одной системе координаты $x_1, \dots, x_n$, а в другой $y_1, \dots, y_n$, то тем самым вторые координаты можно, по крайней мере в принципе, выразить как функции от первых: $y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_n = f_n(x_1, \dots, x_n)$, а первые как функции от вторых: $x_1 = g_1(y_1, \dots, y_n), \dots, x_n = g_n(y_1, \dots, y_n)$. Например, если в примере 3 обознгачить ϕ_i угол, образуемых i-м шарниром с осью абсцисс, то $\phi_2 = \arccos(\ell/2)+\arcsin((\sin\phi_1 - \sin\phi_4)/\ell)$, где $\ell^2 = 3-2\cos\phi_1 - 2\cos\phi_4 + 2\cos(\phi_1-\phi_4)$.

Ввиду этого можно утверждать, что пространством положений (или, как говорят, конфигурационным пространством) механической системы является *гладкое многообразие*. Гладким многообразием размерности n называется топологическое пространство M, наделенное *атласом*. Атлас это совокупность (для простоты будем считать, что конечная) открытых подмножеств $U_\alpha \subset M$ (называемых картами), покрывающих M целиком ($M = \bigcup_\alpha U_\alpha$), для каждого из которых определена *система координат*, то есть взаимно однозначное отображение $x_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$, где $V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ — какое-нибудь открытое подмножество. Предполагается, что отображение $x_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ и обратное к нему $x_\alpha^{-1} : V_\alpha \to U_\alpha$ непрерывны, и требуется, чтобы выполнялись два свойства:

1. Как топологическое пространство, M хаусдорфово: для двух произвольных точек $p_1, p_2 \in M$ таких, что $p_1 \neq p_2$, существуют их непересекающиеся окрестности, т.е. открытые множества W_1, W_2 (не обязательно карты !) такие, что $p_1 \in W_1$, $p_2 \in W_2$ и $W_1 \cap W_2 = \emptyset$.
2. Если карты U_α и U_β пересекаются, то между открытыми множествами $V_{\alpha\beta} = x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta), V_{\alpha\beta} \subset V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ и $V_{\beta\alpha} = x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta), V_{\beta\alpha} \subset V_\beta \subset \mathbb{R}^n$ возникает отображение перехода (отображение замены координат) $x_{\alpha\beta} = x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ — требуется, чтобы все такие отображения были гладкими.

Первое требование носит технический характер (исключает некоторые специально построенные монструозные примеры). Второе требование пока выглядит не слишком естественно (хотя выполняется во всех рассмотренных примерах). Это требование вызвано желанием рассматривать не только положения, но и скорости движения механических систем — это предмет следующего занятия.

Таким образом, гладкое многообразие это объект, который "в малом" (в пределах одной карты) выглядит как открытое подмножество $\mathbb{R}^n$, но отождествление его с этим подмножеством не канонично — зависит от выбранной системы координат. Искусство работы с многообразиями состоит в том, чтобы определять необходимые понятия либо независимо от координат (так любят работать в последние десятилетия в дифференциальной геометрии), либо использовать координаты, но при этом все время следить, что происходит при их замене (так обычно работают в физике).