ГЕОМЕТРИЯ И КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Ю.М.БУРМАН

2. Кинематика: скорость движения механической системы

Движение системы с конфигурационным многообразием M описывается *кривой* на этом многообразии, т.е. непрерывным отображением $\gamma : \mathbb{R} \to M$, где точки $t \in \mathbb{R}$ понимаются как моменты времени, а $\gamma(t) \in M$ — положение системы в момент времени t. Что означают слова "система в момент времени t имеет такую-то скорость" ? Возьмем (для простоты обозначений) $t = 0$ и предположим, что на многообразии M фиксирована система координат (U_i, V_i, x), где $\gamma(0) \in U_i$. Под "скоростью в данной системе координат" естественно понимать набор производных $v_1 = \frac{d}{dt}x_1(\gamma(t))\big|_{t=0}, \dots, v_n = \frac{d}{dt}x_n(\gamma(t))\big|_{t=0}$. Предположим теперь, что в окрестности той же точки $\gamma(0)$ задана еще одна система координат (U_j, V_j, y), причем отображения перехода $y_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, n$. Тогда скорость в новой системе вычисляется так:

$$(1) \quad w_i = \frac{d}{dt}y_i(\gamma(t))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}f_i(x_1(\gamma(t)), \dots, x_n(\gamma(t)))\Big|_{t=0} =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_1(\gamma(0)), \dots, x_n(\gamma(0)))\ \frac{d}{dt}x_j(\gamma(t))\Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_1(\gamma(0)), \dots, x_n(\gamma(0)))v_j.$$

Заметим, что в этой формуле использовано то, что отображения замены координат f_i гладкие.

Предположим теперь, что для двух различных движений γ_1 и γ_2 скорости в момент времени $t = 0$ одинаковы: $\frac{d}{dt}x_i(\gamma_1(t))\big|_{t=0} = \frac{d}{dt}x_i(\gamma_2(t))\big|_{t=0}$ для всякого i. Заметим, что если $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, то, как следует из формулы (1) это равенство сохраняется и при переходе к любой другой системе координат; если же $\gamma_1(0) \neq \gamma_2(0)$, то равенство или неравенство скоростей зависит от системы координат и, следовательно, не имеет смысла. Это подсказывает, что при бескоординатном определении скорости (к которому мы сейчас перейдем) можно сравнивать только скорости движений в одной и той же точке многообразия.

Множество пар (координата, скорость) называется в механике фазовым пространством, а в дифференциальной геометрии — касательным расслоением TM к конфигурационному пространству (многообразию) M. Касательное расслоение определяется как пространство, точками которого являются пары (p, γ), где $p \in M$, а $\gamma : \mathbb{R} \to M$ — гладкая кривая на M такая, что $\gamma(0) = p$; при этом считается, что две пары (p, γ_1) и (p, γ_2) представляют собой одну и ту же точку TM, если $\frac{d}{dt}x_i(\gamma_1(t))\big|_{t=0} = \frac{d}{dt}x_i(\gamma_2(t))\big|_{t=0}$ для всякого i в какой-нибудь (и, следовательно, в любой) системе координат $x_1, \dots, x_n$, определенной в окрестности точки p.

Предыдущие рассуждения показывают, что на касательном расслоении TM к n-мерному многообразию M можно ввести структуру многообразия размерности $2n$. Действительно, если на многообразии M фиксирована система координат (U_i, V_i, x), а (p, γ) — точка касательного расслоения TM, для которой $p \in U_i$, то можно определить набор из $2n$ координат точки как

$$(x_1(p,\gamma),\dots,x_n(p,\gamma),v_1(p,\gamma),\dots,v_n(p,\gamma)) \stackrel{def}{=} (x_1(p),\dots,x_n(p), \frac{d}{dt}x_1(\gamma(t))\Big|_{t=0},\dots,\frac{d}{dt}x_n(\gamma(t))\Big|_{t=0}.$$

Для проверки того, что мы действительно ввели на TM структуру гладкого многообразия, достаточно сослаться на формулу (1) (свойство хаусдорфовости для TM вытекает из аналогичного свойства для M), которая описывает отображения перехода от системы координат (x, v) к аналогичной системе координат (y, w).

Существует естественное отображение $TM \to M$, сопоставляющее паре (p, γ) точку p. Прообраз точки p при этом отображении обозначается T_pM и называется пространством, касательным к M в точке p.

Координатное описание дает нам одну важную информацию про касательное расслоение, которую нелегко увидеть без координат. А именно, обратим внимание на то, что функции перехода от координат (x, v) к координатам (y, w) линейны по v_i, но нелинейны по x_i. Рассмотрим теперь две точки (p, γ_1) и (p, γ_2) пространства T_pM, и пусть в некоторой системе координат (x, v) они имеют координаты $(a_1, \dots, a_n, v_1, \dots, v_n)$ и $(a_1, \dots, a_n, v'_1, \dots, v'_n)$ соответственно. Назовем их суммой точку, имеющую координаты $(a_1, \dots, a_n, v_1 + v'_1, \dots, v_n + v'_n)$. Тогда из линейности отображений перехода вытекает, что понятие суммы точек не зависит от выбранной системы координат. Точно так же можно определить и умножение точки T_pM на число. Тем самым, множество T_pM обладает естественной (не зависящей ни от каких координат) структурой линейного пространства размерности n; ввиду этого элементы TM мы в дальнейшем будем именовать векторами.

Пример 1. Касательное расслоение к окружности TS^1 устроено как $S^1 \times \mathbb{R}$, а отображение $TS^1 \to S^1$ есть просто проекция прямого произведения на сомножитель. Действительно, всякой кривой $\gamma : \mathbb{R} \to S^1$, для которой $\gamma(0) = p \in S^1$, можно сопоставить число $\phi'(\gamma)(0)$, где $\phi(q)$ — угол, образуемой радиус-вектором точки $q \in S^1$ с осью абсцисс — здесь мы считаем, что окружность нарисована на плоскости и имеет единичный радиус. При этом угол определен с точностью до прибавления константы, но его производная определена однозначно.

Пример 2. Касательное расслоение TS^2 к двумерной сфере невозможно отождествить с $S^2 \times \mathbb{R}^2$ так, чтобы отображение $TS^2 \to S^2$ было проекцией на сомножитель. Действительно, пусть это удалось. Тогда рассмотрим те векторы $(p, v) \in TS^2$, которые при этом отождествлении переходят в (p, v_0), где $v_0 \in \mathbb{R}^2$ — фиксированный ненулевой вектор. Для каждой точки $p \in S^2$ существует ровно один такой вектор $(p, v) \in TS^2$. Он ненулевой и непрерывно зависит от p. Таким образом, на сфере S^2 получилось непрерывное поле касательных векторов, нигде не обращающееся в нуль. Но такого поля не существует — это знаменитая “теорема о причесывании ежа”, разобранная во многих популярных книгах по топологии.

Пример 3. Простой, но важный пример. Пусть $L \subset \mathbb{R}^N$ — аффинное подпространство, т.е. множество векторов, заданное системой неоднородных линейных уравнений: $L = \{v \in \mathbb{R}^N \mid (\ell_1, v) = \alpha_1, \dots, (\ell_k, v) = \alpha_k$, где $\ell_1, \dots, \ell_k$ — векторы, $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ — числа, а $(\cdot, \cdot)$ обозначено стандартное скалярное произведение. Пусть $\gamma(t) \subset L$ — кривая, т.е. $(\ell_i, \gamma(t)) \equiv \alpha_i$ для всех $i = 1, \dots, k$. Тогда вектор $r = \gamma'(0)$ удовлетворяет системе *однородных* уравнений $(\ell_i, r) = 0$, $i = 1, \dots, k$ — то есть, принадлежит *линейному* пространству $\widetilde{L}$, параллельному L. Это пространство можно отождествить с касательным пространством к L в произвольной точке $p \in L$.

Пример 4. Опишем явно касательное расслоение к $\mathrm{SO}(3)$. Элемент группы $\mathrm{SO}(3)$ это матрица A, для которой $AA^T = \mathrm{Id}$, и $\det A = 1$. Кривая в $\mathrm{SO}(3)$ это матричнозначная функция $A(t)$, для которой $A(t)A^T(t) = \mathrm{Id}$ при всяком t. Пусть $A(0) = A_0 \in \mathrm{SO}(3)$, и $A'(0) = V$. Тогда матрицы A_0 и V связаны, очевидно, соотношением $A_0 V + V^T A_0^T = 0$. И обратно, для всякой такой матрицы V существует кривая $A(t) \in \mathrm{SO}(3)$, для которой $A(0) = A_0$ и $A'(0) = V$. А поскольку ясно, что касание кривых в точке определяется их производными, получаем, что пространство $T_{A_0}\mathrm{SO}(3)$ состоит из матриц V, обладающих вышеописанным свойством.

Сопоставим теперь матрицам A_0 и V матрицу $\Omega = A_0 V$. Тогда $\Omega^T = V^T A_0^T = -\Omega$, т.е. матрица кососимметрическая. И обратно, если $\Omega^T = -\Omega$, то матрица $V = A_0^{-1}\Omega = A_0^T\Omega$ принадлежит пространству $T_{A_0}\mathrm{SO}(3)$. Иными словами, существует взаимно однозначное и непрерывное отображение $T\,\mathrm{SO}(3) \to \mathrm{SO}(3) \times E$, где E — пространство кососимметрических матриц, при котором естественное отображение $T\,\mathrm{SO}(3) \to \mathrm{SO}(3)$ переходит в проекцию прямого произведения на сомножитель.

Пространство кососимметрических матриц 3×3 трехмерно. Действительно, общий вид кососимметрической матрицы 3×3 таков: $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix}$. Числа $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ называются угловыми скоростями вращения твердого тела относительно осей x, y, z соответственно.

Таким образом, множество положений механической системы обычно представляет собой гладкое многообразие. Следующий пример показывает, однако, что множество скоростей не всегда описывается касательным расслоением.

Пример 5. Рассмотрим твердый шар, катящийся по плоскому бесконечному столу без проскальзывания. Положение шара задается точкой касания его со столом, плюс положением шара в пространстве относительно его центра, т.е. представляет собой элемент многообразия $\mathbb{R}^2 \times \mathrm{SO}(3)$. Покажем, что на самом деле конфигурационное пространство M шара есть все $\mathbb{R}^2 \times \mathrm{SO}(3)$, т.е. любое положение реализуется. Очевидно, что шара может касаться стола в любой точке последнего, и достаточно показать, что шар, касаясь стола, скажем, в начале координат, может занимать любое положение в пространстве.

Положение шара в пространстве относительно его центра тяжести можно описать, указав точку, которой шар касается стола, и задав угол поворота шара относительно вертикальной оси, проходящей через его центр (и указанную точку касания). Поскольку шар можно свободно вращать вокруг этой оси, не сдвигая точку касания со столом, для доказательства равенства $M =$

$\mathbb{R}^2 \times \mathrm{SO}(3)$ достаточно показать, что если в начальном положении шар касается стола в начале координат своей точкой A_0, то можно, катая шар по плоскости, добиться того, чтобы шар касался стола опять в начале координат, но уже другой своей точкой, A.

Рассмотрим плоскость, содержащую точки A_0, A и центр шара O. Прокатим шар по столу в направлении, перпендикулярном этой плоскости до тех пор, пока плоскость не станет горизонтальной. После этого повернем шар вокруг вертикальной оси так, чтобы точка A заняла положение в пространстве, которое до этого занимала точка A_0. Если теперь прокатить шар обратно вдоль той же траектории, то он коснется стола в начале координат своей точкой A.

Таким образом, конфигурационным многообразием шара является 5-мерное многообразие $\mathbb{R}^2 \times \mathrm{SO}(3)$. Условие непроскальзывания, однако, налагает ограничение на множество возможных перемещений шара. Действительно, $T(\mathbb{R}^2 \times \mathrm{SO}(3)) = \mathbb{R}^2 \times T\,\mathrm{SO}(3)$ — скорость движения шара определяется скоростью ω его вращения (это элемент $T\,\mathrm{SO}(3)$) и скоростью v перемещения его центра (это элемент $\mathbb{R}^2$). Но поскольку точка касания шара с плоскостью должна быть неподвижна, ясно, что для каждого ω существует единственное допустимое v. Поэтому в каждом фиксированном положении шара $(r, A) \in \mathbb{R}^2 \times \mathrm{SO}(3)$ множество возможных скоростей заметает 3-мерное подпространство в 5-мерном пространстве $T_{(r,A)}(\mathbb{R}^2 \times \mathrm{SO}(3))$ (ясно, что зависимость v от ω линейная). Тем самым фазовым пространством системы является множество 3-мерных линейных подпространств в касательном расслоении к конфигурационному многообразию. Подобные системы (где фазовое пространство не совпадает с касательным расслоением) называются в механике неголономными; в дальнейшем в нашем курсе мы не будем их рассматривать.