ГЕОМЕТРИЯ И КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Ю.М.БУРМАН

3. Принцип наименьшего действия

Пример 1. Рассмотрим материальную точку массой m, свободно движущуюся по прямой. Пусть известно, что в момент времени 0 частица находится в положении x_0, а в момент времени 1 — в положении x_1: $x(0) = x_0$, $x(1) = x_1$. Тогда положение частицы будет зависеть от времени по закону $x(t) = x_0 + t(x_1 - x_0)$.

Сопоставим теперь *произвольной* траектории $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ соединяющей точки x_0 и x_1, величину $S(x) = \frac{m}{2}\int_0^1 |\dot{x}(t)|^2\,dt$ (называемую *действием*). Действие, тем самым, это отображение $S : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, где $\mathcal{F}$ — множество гладких отображений в $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих граничным условиям. Такие "функции на пространствах функций" обычно называют *функционалами.*

Пусть теперь $x(t) = x_0 + t(x_1 - x_0)$ — описанная выше траектория, а $h(t)$ — произвольная гладкая функция такая, что $y(t) = x(t) + h(t) \in \mathcal{F}$, т.е. $h(0) = h(1) = 0$. Тогда $S(y) = S(x+h) = \frac{m}{2}\int_0^1 \left|\dot{x}(t) + \dot{h}(t)\right|^2 dt = \frac{m}{2}\int_0^1 |\dot{x}(t)|^2\,dt + \frac{m}{2}\int_0^1 \left|\dot{h}(t)\right|^2 dt + m\int_0^1 (\dot{x}(t), \dot{h}(t))\,dt = S(x) + \frac{m}{2}\int_0^1 \left|\dot{h}(t)\right|^2 dt + m\,(\dot{x}(t), h(t))|_0^1 - m\int_0^1 (\ddot{x}(t), h(t))\,dt = S(x) + \frac{m}{2}\int_0^1 \left|\dot{h}(t)\right|^2 dt > S(x)$. Таким образом, "истинная" траектория x — точка минимума функционала S на пространстве всех траекторий $\mathcal{F}$.

Пример 2. Пусть имеется набор из N точек в трехмерном пространстве; массы точек $m_1, \dots, m_N$. Координаты i-й точки обозначим $(x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, x_i^{(3)})$, и конфигурационное пространство всей системы есть $\mathbb{R}^{3N}$. Предположим, что взаимодействие точек друг с другом потенциально. Это означает, что имеется функция V (потенциал), зависящая от координат всех точек, такая что сила, действующая на i-ю точку, равна $-\nabla_i V = (-\frac{\partial V}{\partial x_i^{(1)}}, -\frac{\partial V}{\partial x_i^{(2)}}, -\frac{\partial V}{\partial x_i^{(3)}})$.

Потенциальное взаимодействие довольно часто встречается на практике.

Пример 2.1. Груз на пружине, смещенный на величину x из положения равновесия. По закону Гука сила равна $-kx$, где $k = const.$ — жесткость пружины. Здесь потенциал равен $V(x) = kx^2/2$; сила $F = -V'(x)$.

Пример 2.2. Материальная точка массой m в гравитационном поле неповижной точечной массы M. Если неподвижная масса находится в начале координат, то по гравитационному закону Ньютона сила притяжения равна $-\gamma Mmx/|x|^3$, где $x \in \mathbb{R}^3$ — радиус-вектор точки массой m, а γ — гравитационная постоянная. Здесь можно положить $V(x) = -\gamma Mm/|x|$.

Пусть теперь система наделена взаимодействием с потенциалом V, т.е. ее траектория $x(t)$ является решением системы дифференциальных уравнений $m_i \ddot{x}_s^{(i)}(t) + \frac{\partial V}{\partial x_s^{(i)}}(x(t)) = 0$. Пусть, как и в примере 1, известно ее положение в моменты времени 0 и 1: $x(0) = x_0$, $x(1) = x_1$. Обозначим, как и раньше, символом $\mathcal{F}$ пространство траекторий, удовлетворяющих этим граничным условиям, и пусть $S : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ — функционал, заданный формулой $S(x) = \int_0^1 \left(\sum_i \frac{m_i}{2} \left| \dot{x}^{(i)}(t) \right|^2 - V(x(t)) \right) dt$.

Пусть, как и раньше, $h(0) = h(1) = 0$, так что $y = x + h \in \mathcal{F}$. Обозначим $||h|| = \max_{t \in [0,1]} |h(t)| + \max_{t \in [0,1]} \left| \dot{h}(t) \right|$, и назовем эту величину нормой "шевеления" h. Обозначим $\omega(t) = V(x(t) + h(t)) - V(x(t)) - \sum_{i,s} \frac{\partial V}{\partial x_s^{(i)}}(x(t)) h_s^{(i)}(t))$; тогда по теореме Тейлора имеем $|\omega(t)| < C |h(t)|^2$, где C — некоторая константа.

Имеем теперь: $S(y) = S(x+h) = S(x) + \int_0^1 \sum_i \frac{m_i}{2} \left| \dot{h}^{(i)}(t) \right|^2 dt + \int_0^1 \sum_{i,s} \ddot{x}_s^{(i)}(t) h_s^{(i)}(t) + \int_0^1 \sum_{i,s} \frac{\partial V}{\partial x_s^{(s)}}(x(t)) h_s^{(i)}(t)) \, dt + \int_0^1 \omega(t) \, dt$. Здесь два средних члена сокращаются (поскольку траектория x удовлетворяет уравнению движения), а что касается остальных, то можно написать такую оценку: $\int_0^1 \sum_i \frac{m_i}{2} \left| \dot{h}^{(i)}(t) \right|^2 dt \leq \sum_i \frac{m_i}{2} ||h||^2$, и $\int_0^1 \omega(t) \, dt < C ||h||^2$. Иными $S(x+h) = S(x) + o(||h||)$, то есть $x \in \mathcal{F}$ является стационарной (критической) точкой функционала S.

Возникает подозрение, что динамика всякой механической системы может быть описана как стационарные точки некоторого функционала. Это, вообще говоря, не так, но во многих практически важных случаях такой функционал можно отыскать. Рассмотрим еше один пример.

Пример 3. Пусть имеется система N точек, на которую наложены связи. Это означает, что конфигурационное многообразие системы M является подмножеством пространства $\mathbb{R}^{3N}$. Чтобы свести эту ситуацию к предыдущей, представим, что связи это натянутые между точками пружины с очень большой жесткостью. Это означает, что связи могут нарушаться, так что конфигурационным пространством становится все $\mathbb{R}^{3N}$, но потенциал имеет вид $V(x) = V_0(x) + TV_1(x)$, где V_0 — обычный потенциал, а V_1 — "штраф за нарушение связей": $V_1(x) \geq 0$, причем $V_1(x) = 0$ при $x \in M$, а $T \gg 1$ — большой положительный параметр. Мы знаем, что в этом случае траектория системы будет стационарной точкой функционала $S(x) = \int_0^1 \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} |\dot{x}_i(t)|^2 - V_0(x(t)) - TV_1(x(t)) \, dt$. Ясно при этом, что если начальная и конечная точки находятся на многообразии M, то траектория будет лежать близко от M, и тем ближе, чем больше параметр T. В пределе при $T \to +\infty$ получаем траекторию, идущую по M, которая является стационарной точкой функционала $S_0(x) = \int_0^1 \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} |\dot{x}_i(t)|^2 - V_0(x(t)) \, dt$ (член с V_1 на M равен нулю). В частности, она является стационарной точкой ограничения S_0 на пространство $\mathcal{F}_M$ траекторий, лежащих в M и удовлетворяющих граничным условмям.

Таким образом, динамика многих механических систем описывается так. Пусть M — конфигурационное многообразие, а TM — его касательное расслоение, и пусть $\mathcal{F}$ — множество траекторий, т.е. гладких отображений x :

$[0,1] \to M$, для которых $x(0) = x_0$, $x(1) = x_1$. Тогда для системы определена функция $L : TM \to \mathbb{R}$, называемая *лагранжианом*, такая, что траектории системы являются стационарными точками *функционала действия* $S(x) = \int_0^1 L(x(t))\,dt$. Следует пояснить, что означает выражение $L(x(t))$. Точки TM это пара, состоящая из точки $p \in M$ и класса эквивалентности кривых многообразии M в точке p ("класса касания"). Для всякой траектории $x : [0,1] \to M$ и всякого момента времени t можно рассмотреть точку касательного расслоения TM, которая соответствует точке $x(t) \in M$ и классу эквивалентности кривых в точке $x(t)$, которому принадлежит сама кривая x. Именно эту точку и надо подставить в функцию L. В приведенных выше примерах L представляла собой разность двух членов. Первый из них при ограничении на произвольное касательное пространство $T_pM \subset TM$ превращался в (положительно определенную) квадратичную форму $\sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2}|v_i|^2$, а второй был на самом деле функцией $-V(x)$ на конфигурационном многообразии M — но, поскольку имеется естественная проекция $TM \to M$, эта функция естественно "поднимается" на TM.

Посмотрим, как это все выглядит в координатах. Пусть $L(x,v)$ — лагранжиан; здесь $x = (x_1,\dots,x_n)$ — наюор координат точки многообразия M, а $v = (v_1,\dots,v_n)$ — набор координат касательного вектора. Тогда $S(x) = \int_0^1 L(x_1(t),\dots,x_n(t),\dot{x}_1(t),\dots,\dot{x}_n(t))\,dt$. Пусть $h(t) = (h_1(t),\dots,h_n(t))$ — шевеление траектории, причем, поскольку граничные условия должны соблюдаться, $h(0) = h(1) = 0$. Имеем $S(x+h) = S(x) + \sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{\partial L}{\partial x_i}(x(t),\dot{x}(t))h_i(t) + \frac{\partial L}{\partial v_i}(x(t),\dot{x}(t))\dot{h}_i(t)\,dt + o(||h||)$. Интегрируя по частям, получаем: $S(x+h) - S(x) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \big(\frac{\partial L}{\partial x_i}(x(t),\dot{x}(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_i}(x(t),\dot{x}(t))\big)h_i(t)\,dt + \frac{\partial L}{\partial v_i}(x(t),\dot{x}(t))\big)h_i(t)\Big|_0^1 + o(||h||)$. Внеинтегральный член равен 0 в силу граничных условий, а что касается члена под интегралом, то в случае, когда x — стационарная точка функционала S, он должен быть равен нулю при любом h. Нетрудно убедиться, что это возможно только если все множители при $h_i(t)$ тождественно равны нулю, откуда получаем уравнения движения лагранжевой системы в дифференциальной форме: $\frac{\partial L}{\partial x_i}(x(t),\dot{x}(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_i}(x(t),\dot{x}(t)) = 0$ для всякого i и при всех $t \in [0,1]$. Легко проверить, что в выписанных ранее примерах мы имеем частные случаи этой ситуации.

Таким образом, траектории $x(t)$ механической системы во многих случаях является решениями дифференциального уравнения II порядка. Дифференциальные уравнения обычно имеют много решений; имеет место следующий результат:

> Пусть $L(x,v) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — достаточно гладкая функция. Тогда для всякого $(x_0,v_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и всякого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует и единственна функция $x : (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}$, для которой $\ddot{x}(t) = L(x(t),\dot{x}(t))$ и $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$.

Пример 4. Свободная частица (или система частиц) описывается уравнением $\ddot{x} = 0$. Решение этого уравнения с начальными условмями (x_0,v_0) есть $x(t) = x_0 + v_0t$; оно единственно.

Иными словами, траектория механической системы определяется ее начальным положением и скоростью. Следовательно, пространство траекторий $\mathcal{F}$ можно отобразить на фазовое пространство TM, сопоставляя траектории x

ее начальное положение $x(0) \in M$ и скорость $\dot{x}(0) \in T_{x(0)}M$ (которая есть касательный вектор, представленный самой кривой $x(\cdot)$), причем это соответствие будет взаимно однозначным, если игнорировать трудности, связанные с областью определения (см., однако, пример на следующем занятии). Таким образом, фазовое пространство системы одновременно есть и пространство ее траекторий.

Проделанный анализ показывает заодно, почему в механике лучше избегать моделей, в которых конфигурационное пространство не является гладким многообразием. В точке негладкости ("мертвой точке") системы скорости не определены и не определяют дальнейшего движения. Реальное поведение системы будет зависеть от факторов, которые мы не учли — скажем, в примере с 3 стержнями из занятия 2 — от растяжения стержней или люфтов в шарнирах. Тем самым, точки негладкости это просто точки, в окрестности которых выбранная модель плохо работает.