ГЕОМЕТРИЯ И КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Ю.М.БУРМАН

4. Пространство траекторий

Рассмотрим вначале несколько примеров описания динамики механических систем с помощью лагранжианов.

Пример 1. Рассмотрим маятник длиной l_1 и массой m_1, к котором прицеплен другой маятник, длиной l_2 и массой m_2. Конфигурационным пространством такой системы, очевидно, является двумерный тор $S^1 \times S^1$, координатами на котором являются углы ϕ_1 и ϕ_2 отклонения первого и второго стержня от вертикали. Часть лагранжиана, содержащая производные, очевидно, равна сумме кинетических энергий двух масс. Скорость v_1 движения массы m_1 равна по модулю $l_1\dot\phi_1$ и направлена по нормали к первому стержню; кинетическая энергия равна $ml_1^2\dot\phi_1^2/2$. Скорость v_* движения массы m_2 *относительно массы* m_1 равна по модулю $l_2\dot\phi_2$ и направлена по нормали ко второму стержню. Общая же скорость этой массы равна $v_2 = v_1+v_*$. Угол между векторами v_1 и v_* равен $\phi_1 - \phi_2$, так что кинетическая энергия второй массы равна $m_2\left|v_1 + v_*\right|^2/2 = m_2(|v_1|^2+|v_*|^2+|v_1|\,|v_*|\cos(\phi_1-\phi_2))/2 = \frac{1}{2}m_2(l_1^2\dot\phi_1^2+l_2^2\dot\phi_2^2+2l_1l_2\dot\phi_1\dot\phi_2\cos(\phi_1-\phi_2))$.

Будем считать, что потенциал обеих масс в гравитационном поле в положении равновесия (т.е. при $\phi_1 = \phi_2 = 0$) равен нулю. Тогда при произвольных ϕ_1, ϕ_2 он равен сумме потенциальных энергий масс, т.е. $m_1gl_1(1 - \cos\phi_1) + m_2g(l_1(1-\cos\phi_1)+l_2(1-\cos\phi_2))$. Подставляя эти значения в общее уравнение Лагранжа, получим такие уравнения движения системы:

$$\begin{cases}(m_1l_1^2 + m_2l_2^2)\ddot\phi_1 + m_2l_1l_2\ddot\phi_2 + (m_1 + m_2)gl_1\sin\phi_1 = 0\\ m_2l_1l_2\ddot\phi_1 + m_2l_2^2\ddot\phi_2 + m_2gl_2\sin\phi_2 = 0.\end{cases}$$

Заметим, что при таком способе вывода этих уравнений нам не приходится иметь дело с фиктивными “силами реакции стержней”, а затем исключать их из уравнений — уравнение сразу получается в координатах на конфигурационном многообразии, т.е. с учетом всех связей.

Пример 2. Задача о движении частицы в стационарном электромагнитном поле — пример ситуации, когда лагранжиан не представляется в виде “квадратичная форма на касательном пространстве плюс функция на конфигурационном многообразии”. Электромагнитное поле в точке $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ характеризуется в классической электродинамике двумя векторами $E(x)$ и $B(x)$ (электрической напряженностью и магнитной индукцией). Сила, действующая на частицу с зарядом q, зависит от ее положения *и скорости* и равна $qE(x) + q[v, B]$, где квадратные скобки означают векторное произведение: $[a, b] = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$. Из уравнений Максвелла, которым подчиняется электромагнитное поле, следует, что вектор-функции E и B не произвольны: существуют такая функция $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (электрический, или скалярный, потенциал) и такое отображение $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (векторный потенциал), что $E_i(x) = -\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x)$, и $B(x) = \operatorname{rot} A(x)$, то есть, в координатах, $B_1 = \frac{\partial A_2}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_2}$, $B_2 = \frac{\partial A_3}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_3}$, $B_3 = \frac{\partial A_1}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_1}$.

Конфигурационным пространством частицы является $\mathbb{R}^3$. Касательное расслоение к $\mathbb{R}^3$ это $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, с координатами $x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3$. Лагранжиан частицы задается формулой $L(x, v) = \frac{m}{2} |v|^2 - q\phi(x) - q(A(x), v)$, где m — масса, q — заряд, а скобки в последнем члене означают скалярное произведение.

Теперь: $\frac{\partial L}{\partial x_i}(x, \dot{x}) = -q\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) - q\sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_k}{\partial x_i}(x)\dot{x}_k$, $\frac{\partial L}{\partial v_i}(x, \dot{x}) = m\dot{x}_i - qA_i(x)$, откуда уравнение движения частицы (уравнение Лагранжа) имеет вид $m\ddot{x}_i = q\frac{\partial \phi}{\partial x_i} + q\sum_{k=1}^3 \bigl(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}\bigr)\dot{x}_k$, что в точности совпадает с $m\ddot{x} = qE(x) + q[\dot{x}, B(x)]$.

На предыдущем занятии мы построили семейство λ_t отображений $\mathcal{F} \to TM$: пространства траекторий механической системы в фазовое пространство: $\lambda_t(x(\cdot)) = (x(t), \dot{x}(t))$. Для некоторых многообразий M (на самом деле, для компактных) эти соответствия являются взаимно однозначными; однако в общем случае это не так. Следующий пример показывает, зачем в теореме существования и единственности нужны оговорки по поводу локальности, области определения и т.п.

Пример 3. Рассмотрим уравнение $\ddot{x} = \frac{2\dot{x}^2}{x}$. Его решения имеют вид $x(t) = 1/(at + b)$; если $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$, то $a = -v_0/x_0^2$, $b = 1/x_0$. Решение с таким начальным данными не существует (уходит на бесконечность) при $t = x_0^3/v_0$; таким образом, нужно брать $\varepsilon < x_0^3/v_0$. Заметим, что нельзя выбрать ε одним и тем же для *всех* траекторий.

Тем самым в общем случае пространство траекторий $\mathcal{F}$ можно отождествить с фазовым пространством только локально. Мы, впрочем, будем сейчас работать с $\mathcal{F}$ в терминах траекторий, так что это не важно.

Зафиксируем два момента времени t_0, t_1 и определим *действие* $S : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ формулой $S(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(x(t))\, dt$. Как следует из принципа наименьшего действия, траектории $x \in \mathcal{F}$ выделяются из всех траекторий тем, что действие на них стационарно, но важно отметить следующее: речь идет о том, как изменяется действие, если траектория меняется, но граничные значения $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$ фиксированы. Элементы $x \in \mathcal{F}$ имеют различные значения на границе, и поэтому функция $S : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ не является константой.

Пусть N — произвольное многообразие, $p \in N$ а $f : N \to \mathbb{R}$ — гладкая функция. Дифференциал $df(p)$ это отображение $T_pN \to \mathbb{R}$, определяемое следующим образом: пусть $v \in T_pN$ — вектор, а кривая $\gamma : \mathbb{R} \to N$ — его представитель. Тогда $df(p)(v) \stackrel{def}{=} \frac{d}{dt} f(\gamma(t))\big|_{t=0}$. Нетрудно видеть (например, произведя вычисление в координатах), что значение $df(p)(v)$ действительно зависит только от касательного вектора v (а не от выбора его представителя — кривой γ), и что отображение $df(p)$ линейно.

Пример 4. Пусть $N = \mathbb{R}$, а $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ произвольна. Тогда представителем вектора $\alpha \in \mathbb{R} = T_p\mathbb{R}$ является кривая $\gamma(t) = p + \alpha t$. Получаем, что $df(p)(\alpha) = f'(p)\alpha$.

Вычислим дифференциал $dS(x_0) : T_{x_0}\mathcal{F} \to \mathbb{R}$. Кривой на $\mathcal{F}$ является двупараметрическое отображение $x(t, \tau)$ такое, что для всякого τ отображение $x(\cdot, \tau) : \mathbb{R} \to M$ принадлежит множеству $\mathcal{F}$. Элемент касательного пространства $T_{x_0}\mathcal{F}$ задается условием $x(t, 0) \equiv x_0(t)$; соответствующий касательный вектор обозначим $X \in T_{x_0}\mathcal{F}$. Имеем: $dS(x_0)(X) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t)), \frac{\partial x}{\partial \tau}(t,0)\right) + \left(\frac{\partial L}{\partial v}(x(t), \dot{x}(t)), \frac{\partial \dot{x}}{\partial \tau}(t,0)\right)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}(x(t), \dot{x}(t)), \frac{\partial x}{\partial \tau}(t,0)\right)\, dt + \left(\frac{\partial L}{\partial v}(x(t), \dot{x}(t)), \frac{\partial x}{\partial \tau}(t,0)\right)\Big|_{t_0}^{t_1}$. Подинтегральный член равен 0 в силу уравнения Лагранжа, откуда следует, что $dS = \mu_{t_1} - \mu_{t_0}$, где $\mu_t : T_{x_0}\mathcal{F} \to \mathbb{R}$ — линейное отображение значение которой на векторе X, представленном кривой $x(\cdot,\cdot)$, равно $\mu_t(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial v_i}(x(t,0), \dot{x}(t,0))\frac{\partial x_i}{\partial \tau}(t,0)$.

Важное замечание: несмотря на то, что мы определили отображение μ_t в координатах, оно от координат не зависит — проверьте !

Таким образом, на пространстве траекторий $\mathcal{F}$ механической системы возникает следующая важная структура: семейство μ_t линейных отображений $T_{x_0}\mathcal{F} \to \mathbb{R}$, таких что $\mu_{t_1} - \mu_{t_0}$ является дифференциалом функции (действия). На инвариантном геометрическом языке эта структура называется связностью на (тривиальном) главном $\mathbb{R}$-расслоении над $\mathcal{F}$, но мы в рамках данного курса не имеем возможности изучить этот язык ...

References

[1] P.Deligne, D.Freed, "Classical Fields", Chapter 1. Это курс лекций, прочитанный авторами в Институте перспективных исследований (IAS) в Принстоне; он есть на web-странице IAS: http://www.math.ias.edu.