Занятия А. В. Кочергина

Предлагается разобрать ряд задач, которые связаны с лекциями Д. В. Аносова и несколько расширяют их содержание, затрагивая смежные вопросы.

Градиент и градиентное поле

Пусть $M = (x; y)$ — точки плоскости, $f(M) = f(x, y)$ — функция двух переменных, определённая в некоторой области.

Определения

1. Производной функции f вдоль вектора $\bar{v}$ в точке M_0 называется число

$$f'_{\bar{v}}(M_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(M_0 + h\bar{v}) - f(M_0)}{h}$$

Если $\bar{v}$ — единичный вектор, то $f'_{\bar{v}}(M_0)$ называется производной по направлению.
2. Функция f называется дифференцируемой в точке $(x; y)$, если в некоторой окрестности точки приращение функции можно представить в виде

$$\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y) \cdot \rho,$$

где A и B — числа, не зависящие от Δx и Δy, $\alpha(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $(\Delta x; \Delta y) \to (0; 0)$, $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.
3. В декартовых координатах *градиентом* функции f в точке M_0 называется вектор

$$\mathrm{grad}\big|_{M_0} f = \big(f'_x(M_0), f'_y(M_0)\big)$$

(f'_x, f'_y — частные производные).

Задачи.

1. Докажите, что если функция дифференцируема в т. M_0, то
а) $A = f'_x(M_0)$, $B = f'_y(M_0)$;
б) $f'_{\bar{v}}(M_0) = (\mathrm{grad}|_{M_0} f, \bar{v})$;
в) градиент указывает направление наибольшего роста функции, а его длина равна этой наибольшей скорости;
г) градиент в точке перпендикулярен линии уровня функции (т.е. линии, на которой функция постоянна), проходящей через эту точку.

2. Докажите, что если f'_x и f'_y являются непрерывными функциями, то f дифференцируема. Верно ли обратное?

3. Может ли функция, имеющая первые частные производные, быть недифференцируемой? разрывной?
Верны ли соответствующие утверждения в трёхмерном пространстве?

4. Докажите, что

$$\frac{d}{dt}[\bar{r}, \bar{v}] = [\dot{\bar{r}}, \bar{v}] + [\bar{r}, \dot{\bar{v}}]$$

5. Пусть в некоторой области на плоскости или в пространстве силовое поле $\bar{F}$ задается в виде

$$\bar{F} = \mathrm{grad}\, V, \qquad (*)$$

где V — функция с непрерывными частными производными. Докажите, что работа силы $\bar{F}$ по любому пути из т. A в т. B одна и та же и зависит только от точек A и B.
Обратно, если работа силы $\bar{F}$ по любому замкнутому пути равна нулю, то силу $\bar{F}$ можно представить в виде (*). (Такое поле называется *градиентным*).

6. Докажите, что при движении материальной точки согласно уравнению $m\ddot{\bar{r}} = -\operatorname{grad} V(\bar{r})$ имеет место закон сохранения механической энергии

$$\frac{mv^2}{2} + V(\bar{r}) = \text{const} \quad (v = |\bar{v}|, \quad \bar{v} = \dot{\bar{r}}).$$

7. Докажите, что центральное поле сил $\bar{f}(\bar{r}) = f(r)\bar{r} \quad (r = |\bar{r}|)$ является градиентным.

8. Найдите силовое поле для $V(\bar{r}) = -1/r, \quad r, \quad r^2/2$.

Кривые второй степени (конические сечения)

1. Докажите эквивалентность следующих определений эллипса с фокусами S и S' и большой полуосью a:

— *геометрическое место точек, сумма расстояний от каждой из которых до фокусов равна* $2a$;

— *геометрическое место точек, равноудаленных от фокуса* S *и окружности радиуса* $2a$ *с центром в* S';

— *множество точек* $(x; y)$, *удовлетворяющих уравнению* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, *если* $b^2 = a^2 - c^2$, $S = (c; 0)$, $S' = (-c; 0)$;

— *множество точек, удовлетворяющих уравнениям* $x = a\cos\phi, y = b\sin\phi$ (см. предыдущий пункт).

1a. Докажите, что луч, выпущенный из фокуса, отразившись от эллипса по закону "угол падения равен углу отражения", попадет во второй фокус эллипса.

2. Докажите эквивалентность следующих определений гиперболы с фокусами S и S' и большой полуосью a:

— *геометрическое место точек, разность расстояний от каждой из которых до фокусов равна* $2a$;

— *геометрическое место точек, равноудаленных от одного фокуса и окружности радиуса* $2a$ *с центром в другом фокусе*;

— множество точек $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, если $b^2 = c^2 - a^2$, $S = (c; 0)$, $S' = (-c; 0)$;

2a. Докажите, что луч, выпущенный из фокуса, отразившись от гиперболы, попадет на прямую, проходящую через второй фокус гиперболы.

3. Выведите уравнение параболы с директрисой $y = -p$ и фокусом в точке $(0; p)$.

3a. Докажите, что луч, выпущенный из фокуса, после отражения от параболы будет параллелен оси параболы.

4. Докажите, что через каждую точку, кроме "Солнца", проходит орбита с заданными значениями энергии E и момента импульса $M > 0$. Сколько различных орбит с заданными параметрами может проходить через точку?
Рассмотрите случаи $E < 0$, $E = 0$, $E > 0$.