РАЗБИЕНИЯ И ПЕРЕСТАНОВКИ.

ЗАНЯТИЕ 1: ОГРАНИЧЕННЫЕ РАЗБИЕНИЯ

Обозначим символом $Y(N,a,b)$ количество разбиений числа N в сумму не более чем a слагаемых, каждое из которых не превосходит b. Также обозначим $\binom{n}{k}_q \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{N=0}^{\infty} Y(N,k,n-k)q^N$. Положим по определению $Y(0,a,b)=1$ при всех $a,b\geq 0$, и $Y(N,a,0)=Y(N,0,b)=0$ при $N>0$; следовательно, $\binom{n}{0}_q = \binom{n}{n}_q = 1$ для всякого n.

Графически указанные разбиения изображаются диаграммами из клеточек (их называют диаграммами Юнга), помещенными в прямоугольник $a\times b$. Ясно, что количество точек в такой диаграмме не превосходит ab, откуда вытекает, что $\binom{n}{k}_q$ на самом деле является многочленом от q степени ab. Кроме того, из этого немедленно вытекает такое равенство:

Предложение 1. $Y(N,a,b)=Y(N,b,a)$ *и, следовательно,* $\binom{n}{k}_q = \binom{n}{n-k}_q$.

Доказательство. Отразим диаграмму Юнга относительно диагонали $y=-x$. □

Обозначение $\binom{n}{k}_q$ выбрано недаром: в англоязычных книгах символом $\binom{n}{k}$ обозначается биномиальный коэффициент (который по-русски обычно называется C_n^k). Напомним, что биномиальные коэффициенты также симметричны: $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$, и удовлетворяют граничным условиям: $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$. Для них имеется также соотношение $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$, которое позволяет вычислять биномиальные коэффициенты последовательно с помощью треугольника Паскаля:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

в котором каждое число равно сумме чисел, стоящих прямо над ним справа и слева.

Оказывается, сходство между биномиальными и q-биномиальными коэффициентами простирается и дальше: для многочленов $\binom{n}{k}_q$ имеются формулы:

Предложение 2. $\binom{n}{k}_q = \binom{n-1}{k}_q + q^{n-k}\binom{n-1}{k-1}_q$ *и* $\binom{n}{k}_q = q^k\binom{n-1}{k}_q + \binom{n-1}{k-1}_q$.

Доказательство. Второе соотношение выводится из первого с помощью замены $k\mapsto n-k$. Для доказательства первого соотношения рассмотрим все диаграммы, помещающиеся в прямоугольнике из $n-k$ строк и k столбцов. Напомним, что самая длинная строка диаграммы — верхняя. Имеются два случая: верхняя строка имеет длину k, и верхняя строка имеет меньшую длину.

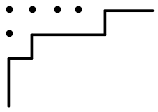
В первом случае отрежем верхнюю строку. Тогда оставшаяся диаграмма содержит $N-k$ клеток и помещается в прямоугольнике $n-k-1\times k$. Обратно, ко всякой такой диаграмме можно пририсовать верхнюю строку из $n-k$ клеток — получится диаграмма из N точек в прямоугольнике $k\times(n-k)$.

Во втором случае в самом правом столбце прямоугольника точек нет — следовательно, диаграмма помещается в прямоугольнике $(k-1)\times(n-k)$. Получается равенство $Y(N,k,n-k)=Y(N-k,k,n-k-1)+Y(N,k-1,n-k)$. Умножая обе его части на q^N и суммируя по всем N, получим требуемое. □

Из предложения 2 при произвольном q получается "q-треугольник Паскаля", в котором стоят многочлены $\binom{n}{k}_q$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1+q & & 1 & & \\
 & 1 & & 1+q+q^2 & & 1+q+q^2 & & 1 & \\
1 & & 1+q+q^2+q^3 & & 1+q+2q^2+q^3+q^4 & & 1+q+q^2+q^3 & & 1
\end{array}$$

1



1121112122

Рис. 1. 6 единиц, 4 двойки, 5 пар "21"

в котором каждый многочлен равен сумме многочлена, стоящего над ним сверху слева, и многочлена, стоящего сверху и справа, умноженного на q^k. Так можно быстро вычислить $\binom{n}{k}_q$ при произвольном n и k.

Из предложения 2 вытекает такое неожиданное следствие:

Следствие. *При* $q = 1$ *имеет место равенство* $\binom{n}{k}_q = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Действительно, если $q = 1$, то соотношения для $\binom{n}{k}_q$ выглядят совершенно так же, как для биномиальных коэффициентов: $\binom{n}{k}_q = \binom{n-1}{k}_q + \binom{n-1}{k-1}_q$, и $\binom{n}{0}_q = \binom{n}{n}_q = 1$. Эти соотношения позволяют вычислить $\binom{n}{k}_q$ однозначно — треугольник Паскаля ! — поэтому получится $\binom{n}{k}$.

Ввиду его важности, приведем еще одно доказательство следствия. Значение многочлена $P(q)$ при $q = 1$ равно сумме его коэффициентов. Тем самым следствие утверждает, что общее число диаграмм (неважно, из скольких точек), которые можно разместить в прямоугольнике $k \times (n-k)$, равно $\binom{n}{k}$. Чтобы задать такую диаграмму, нужно задать k чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — количество точек в соответствующих столбцах. При этом должны выполняться неравенства $n - k \geq a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k \geq 0$. Прибавим теперь к числу a_k единицу, к a_{k-1} двойку, …, к a_1 — число k. Тогда получатся числа $b_1, b_2, \ldots, b_k$, удовлетворяющие неравенствам $n \geq b_1 > b_2 > \cdots > b_k \geq 1$. Количество способов выбрать такие числа это количество способов отметить k различных целых точек между 1 и n. Как хорошо известно, это — число сочетаний, то есть $\binom{n}{k}$.

Для числа $Y(N, a, b)$ ограниченных разбиений имеется еще одно красивое представление, принадлежащее П.А. Мак-Магону:

Предложение 3. $Y(N, a, b)$ *равно количеству последовательностей* $p_1, \ldots, p_{a+b}$ *из* a *двоек и* b *единиц, в которых имеется ровно* N *пар* (p_i, p_j) *таких, что* $i < j$, $p_i = 2$ *и* $p_j = 1$.

Например, если $N = 0$, то такая последовательность в точности одна — сначала идет b единиц, а потом a двоек.

Доказательство. Изобразим разбиение числа N диаграммой из N точек в прямоугольнике $a \times b$. Проведем ломаную линию, которая начинается в правом верхнем углу, идет налево до первой точки, затем спускается вниз на один шаг, опять идет налево до первой точки, и т.д., пока не окажется в левом нижнем углу (см. рис. 1). По этой линии диаграмму можно восстановить однозначно. Закодируем каждый вертикальный отрезок линии двойкой, а горизонтальный — единицей. Тогда число единиц, идущих после первой двойки, равно количеству точек в первой строке, после второй двойки — во второй строке, и так далее. □