РАЗБИЕНИЯ И ПЕРЕСТАНОВКИ.

ЗАНЯТИЕ 2: ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА

Предложение 1. $\binom{n}{k}_q = \frac{(q)_n}{(q)_k(q)_{n-k}}$, *где символом* $(q)_s$ *обозначено произведение* $(1-q)(1-q^2)\dots$*м*$(1-q^s)$.

Доказательство. Достаточно проверить, что выражения $a(n,k) = \frac{(q)_n}{(q)_k(q)_{n-k}}$ удовлетворяют тождествам для q-треугольника Паскаля. Очевидно, $a(n,0) = a(n,n) = 1$, и

$$\begin{aligned} a(n-1,k) + q^{n-k}a(n-1,k-1) &= \frac{(q)_{n-1}}{(q)_k(q)_{n-1-k}} + q^{n-k}\frac{(q)_{n-1}}{(q)_{k-1}(q)_{n-k}} = \\ &= \frac{(q)_{n-1}}{(q)_{k-1}(q)_{n-1-k}}\left(\frac{1}{1-q^k} + \frac{q^{n-k}}{1-q^{n-k}}\right) = \\ &= \frac{(q)_{n-1}}{(q)_{k-1}(q)_{n-1-k}}\frac{1-q^n}{(1-q^k)(1-q^{n-k})} = \\ &= \frac{(q)_n}{(q)_k(q)_{n-k}} = a(n,k). \end{aligned}$$

□

Обозначим теперь $U(N,k)$ количество разбиений числа N на слагаемые, *не превосходящие* k. Очевидно, $U(N,1) = 1$ для всякого N. При $k > 1$ для $U(N,k)$ не существует удобной формулы, но имеет место такой замечательный результат:

Предложение 2. *Число* $U(N,k)$ *равно коэффициенту при* q^N *в выражении* $\frac{1}{(q)_k} = \frac{1}{1-q}\cdot\frac{1}{1-q^2}\cdot\dots\cdot\frac{1}{1-q^k}$.

Имеется в виду, что в произведении k бесконечных сумм раскрываются скобки; при этом каждое отдельное слагаемое вида q^N встречается конечное число раз, так что можно привести подобные члены и вычислить коэффициент при q^N; утверждается, что он равен $U(N,k)$.

Дадим два доказательства этого утверждения.

Первое доказательство. Как мы установили на прошлом занятии, количество $Y(N,k,n-k)$ разбиений числа N на не более k слагаемых, не превосходящих $n-k$, равно $\frac{(q)_n}{(q)_k(q)_{n-k}} = \frac{(1-q^{n-k+1})\dots(1-q^n)}{(q)_k}$. Устремим n к бесконечности, сохраняя k постоянным. Тогда рано или поздно с ростом n число $Y(N,k,n-k)$ перестанет меняться и сделается равным $U(N,k)$.

С другой стороны $\frac{(1-q^{n-k+1})\dots(1-q^n)}{(q)_k}$ представляет собой последовательность многочленов от q все возрастающей степени. Зафиксируем число s и рассмотрим коэффициент при q^s в этих многочленах. Выражение $(1-q^{n-k+1})\dots(1-q^n)$ начинается с единицы, а кроме нее содержит при больших n только q в степенях, бóльших s. Таким образом, рано или поздно с ростом n коэффициент перестает меняться — стабилизируется, и причем он будет равен коэффициенту при q^s, получающемуся при разложении в ряд выражения $\frac{1}{(q)_k}$. □

Второе доказательство. Рассмотрим сначала такую задачу: сколько существует разбиений числа N в сумму слагаемых, если все слагаемые *равны* k ? Очевидно, ответ таков: если N делится на k, то разбиение ровно одно, а в противном случае их не существует. Это правило можно выразить еще таким образом:

Количество разбиений N *в сумму слагаемых, равных* k, *равно коэффициенту при* q^N *в выражении*

$$1 + q^k + q^{2k} + q^{3k} + \dots = \frac{1}{1-q^k}.$$

Чтобы задать разбиение числа N на слагаемые, не превосходящие k, нужно задать k чисел $a_1, a_2, \dots, a_k$: число a_1 — количество единиц в разбиении, число a_2 — количество двоек, и т.д. При этом числа $a_1, a_2, \dots, a_k$ должны быть целыми и неотрицательными (равенство $a_i = 0$ возможно — разбиение может и не содержать слагаемых, равных i) и должны удовлетворять равенству $1\cdot a_1 + 2\cdot a_2 + \dots + k\cdot a_k = N$. Иными словами, $U(N,k)$ равно количеству решений этого уравнения в целых неотрицательных числах $a_1, a_2, \dots, a_k$.

Рассмотрим теперь выражение

$$(1 + q + q^2 + \dots)(1 + q^2 + q^4 + \dots)\dots(1 + q^k + q^{2k} + \dots).$$

При раскрытии скобок возникают всевозможные выражения вида $q^{a_1}q^{2a_2}\dots q^{ka_k}$, где $a_1, \dots, a_k$ — целые неотрицательные числа; каждое такое выражение дает вклад, равный единице, в коэффициент при q^N, если и только если $1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + \dots + k \cdot a_k = N$. Тем самым коэффициент при q^N равен количеству решений этого уравнения в целых неотрицательных числах $a_1, a_2, \dots, a_k$, то есть равен $U(N, k)$. $\square$

Следствие (предложения 2). *Количество $p(N)$ всевозможных разбиений числа N равно коэффициенту при q^N в бесконечном произведении*

$$P_1(q)P_2(q)P_3(q)\dots = \frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\dots}.$$

Здесь имеется в виду следующее: при раскрытии бесконечного числа скобок мы выбираем из каждой скобки член вида q^{ka_k}; при этом из всех скобок, *кроме конечного количества*, мы выбираем единицу, которая на произведение не влияет. Тогда каждый полученный моном представляет собой конечную степень переменной q, причем каждое отдельное слагаемое вида q^N встречается конечное число раз, так что можно привести подобные члены и вычислить коэффициент при q^N; оказывается, он равен $p(N)$. Действительно, в разбиении числа N не могут встречаться слагаемые, большие N, поэтому $p(N) = q(N, N)$. Число $q(N, N)$ равно, согласно предложению 2, коэффициенту при q^N в выражении $P_1(q) \dots P_N(q)$. Поскольку множители $P_{N+1}(q)$, $P_{N+2}(q)$, и т.д., содержат q только в степенях, больших чем N, коэффициент при q^N в конечном произведении $P_1(q) \dots P_N(q)$ и в бесконечном произведении $P_1(q) \dots P_N(q) \dots$ один и тот же.

Задача 1. Пусть $V(N)$ — количество разбиений числа N на нечетные слагаемые. Докажите, что $V(N)$ равно коэффициенту при q^N в бесконечном произведении

$$v(q) = \frac{1}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\dots}.$$

Задача 2. Пусть $W(N)$ — количество разбиений числа N на попарно различные слагаемые. Докажите, что $W(N)$ равно коэффициенту при q^N в бесконечном произведении

$$w(q) = (1+q)(1+q^2)(1+q^3)\dots$$

Задача 3. Докажите, что $v(q) = w(q)$. Докажите непосредственно, что $V(N) = W(N)$.

Особый интерес представляет знаменатель полученного выражения. Если мы будем обрывать произведение на первом, втором, и т.д., месте, то получим следующее:

$$\begin{array}{rclllllll}
1-q & = & \mathbf{1-q} & & & & & \\
(1-q)(1-q^2) & = & \mathbf{1-q} & \mathbf{-q^2} & +q^3 & & & \\
(1-q)(1-q^2)(1-q^3) & = & \mathbf{1-q} & \mathbf{-q^2} & & +q^4 & +q^5 & -q^6 \\
(1-q)\dots(1-q^4) & = & \mathbf{1-q} & \mathbf{-q^2} & & & +2q^5 & +\dots \\
(1-q)\dots(1-q^5) & = & \mathbf{1-q} & \mathbf{-q^2} & & & \mathbf{+q^5} & +\dots
\end{array}$$

Слагаемые, выделенные жирным шрифтом, стабилизируются, т.е. не меняются при последующих умножениях. После раскрытия скобок в бесконечном произведении остаются в точности "стабильные" слагаемые. Оказывается, имеет место такая формула:

$$(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\dots = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(q^{(3k^2-k)/2} + q^{(3k^2+k)/2}\right) = 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - \dots$$

Комбинаторный смысл левой части равенства понятен: коэффициент при q^N равен разности двух чисел — количества разбиений числа N в сумму *четного* числа попарно различных слагаемых, и количества разбиений числа N в сумму *нечетного* числа попарно различных слагаемых. Доказательство формулы будет дано в начале следующего занятия.