РАЗБИЕНИЯ И ПЕРЕСТАНОВКИ.

ЗАНЯТИЕ 3. ТОЖДЕСТВО ЯКОБИ.

Начнем с доказательства тождества Эйлера.

Для доказательства рассмотрим всевозможные разбиения числа N в сумму *попарно различных* слагаемых: $N = a_1 + a_2 + \dots + a_l$, где $a_1 > a_2 > \dots > a_l$. Каждому такому разбиению припишем знак, равный $(-1)^l$ (то есть плюс при l четном и минус при l нечетном). Тогда, очевидно, коэффициент при q^N в выражении $(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\dots$ равен сумме знаков всех разбиений.

Графически разбиение числа N на попарно различные слагаемые представляется диаграммой Юнга, в которой все строки имеют разную длину. Рассмотрим на множестве таких диаграмм такую операцию $\mathcal{C}$ (см. рис. 1): срежем крайнюю правую диагональ и приставим ее к диаграмме в качестве самой нижней строки. Также можно рассмотреть обратное преобразование $\mathcal{C}^{-1}$.

Разумеется, $\mathcal{C}(D)$ определено не для каждой диаграммы D — необходимо, чтобы длина крайней правой диагонали была меньше длины самой нижней строки. Нетрудно видеть, что это преобразование обладает таким свойством: если для диаграммы D можно выполнить преобразование $\mathcal{C}$, то нельзя выполнить обратное преобразование, и наоборот. В частности, если к диаграмме D применяется преобразование $\mathcal{C}$, то к диаграмме $\mathcal{C}(D)$ оно уже неприменимо.

Тем самым, все множество диаграмм с попарно различными строками разбивается на три подмножества: диаграммы, к которым применимо преобразование $\mathcal{C}$ (множество A_1), диаграммы, к которым применимо обратное преобразование (множество A_2), и диаграммы, к которым не применяется ни одно из двух преобразований (множество A_3). Множество $A_1 \cup A_2$ разбито на непересекающиеся пары: пару образуют диаграммы $D \in A_1$ и $\mathcal{C}(D) \in A_2$. Поскольку количество строк в диаграммах D и $\mathcal{C}(D)$ отличается на единицу, их знаки противоположны, и при сложении друг друга компенсируют. Тем самым, искомый коэффициент при t^N равен сумме знаков диаграмм, принадлежащих множеству A_3.

Нетрудно видеть, что A_3 принадлежат диаграммы двух видов: диаграммы из k строк длиной $k, k+1, \dots, 2k-1$ и диаграммы из k строк длиной $k+1, k+2, \dots, 2k$. Количество точек в диаграмме первого вида равно $k + (k+1) + \dots + (2k-1) = (3k^2-k)/2$, а в диаграмме второго вида равно $(k+1)+(k+2)+\dots+2k = (3k^2+k)/2$ — тем самым, формула Эйлера доказана.

Следствие.

$$p(N) = p(N-1) + p(N-2) - p(N-5) - p(N-7) + p(N-12) + p(N-15) - \dots.$$

(здесь вычитаемые это “пятиугольные числа” $(3k^2 \pm k)/2$, а знаки чередуются через два).

Доказательство. Из формулы Эйлера вытекает, что

$$\begin{aligned} 1 &= (p(0) + p(1)q + p(2)q^2 + \dots) \cdot (1-q)(1-q^2)(1-q^3)\dots = \\ &= (p(0) + p(1)q + p(2)q^2 + \dots) \cdot (1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - \dots). \end{aligned}$$

Доказываемое следствие эквивалентно утверждению, что после раскрытия скобок в правой части коэффициент при q^N будет равен нулю. □

Докажем теперь такое тождество с бесконечными произведениями (тождество Якоби):

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{k^2} z^k = \prod_{m=0}^{\infty} (1 - q^{2m+2})(1 + q^{2m+1}/z)(1 + q^{2m+1} z).$$

Прямое комбинаторное доказательство этого тождества придумано недавно А.В. Спиваком; прежде чем изложить его, нам необходимо переформулировать тождество Якоби в комбинаторных терминах.

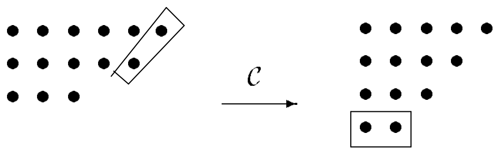

Рис. 1. Преобразование на множестве диаграмм

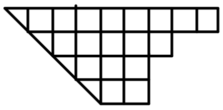

Рис. 2. Скошенная диаграмма разбиения $40 = 17 + 11 + 7 + 5$

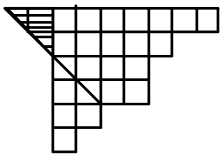

Рис. 3. Объединение двух диаграмм дает разбиение $46 = 14 + 10 + 8 + 8 + 4 + 2$

Обе части равенства представляют собой бесконечные ряды от переменных q и z. Нам нужно найти комбинаторный смысл коэффициентов при $z^n q^s$ в левой и правой части. По аналогии с результатами лекции 1 нетрудно увидеть, что коэффициент при $z^i q^n$ в выражении $\prod_{m=0}^{\infty}(1 + q^{2m+1}z)$, а также коэффициент при $z^{-i}q^n$ в выражении $\prod_{m=0}^{\infty}(1 + q^{2m+1}/z)$, равен количеству разбиений числа n в сумму i попарно различных нечетных слагаемых. Отсюда немедленно вытекает, что коэффициент при $z^i q^n$ в произведении $\prod_{m=0}^{\infty}(1+q^{2m+1}z)(1+q^{2m+1}/z)$ равен количеству пар (σ, τ) разбиений, каждое из которых состоит из попарно различных нечетных слагаемых, общая сумма двух разбиений равна n, и первое содержит на i слагаемых больше, чем второе (если $i < 0$, то в первом слагаемых меньше).

Перенесем теперь множитель $\prod_{m=0}^{\infty}(1-q^{2m+2})$ в левую часть равенства. Тогда он превратится в $\frac{1}{(1-q^2)(1-q^4)\dots} = \sum_{s=0}^{\infty} a(s)q^s$, где $a(s)$ — количество разбиений числа s в сумму четных слагаемых (одинаковых или различных, неважно). После умножения на $\sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{k^2} z^k$ получим бесконечный ряд от переменных q и z, коэффициент при $z^i q^n$ в котором равен $a(n - i^2)$. Тем самым, тождество Якоби эквивалентно такому комбинаторному утверждению:

Предложение 1. *Количество пар разбиений на различные нечетные слагаемые с общей суммой n, в которых первое разбиение содержит на i слагаемых больше, чем второе, равно количеству разбиений числа $n - i^2$ в сумму четных слагаемых.*

Доказательство (А.В. Спивак). Разбиение числа n в сумму различных нечетных слагаемых удобно изображать в виде “скошенной диаграммы”, как на рис. 2. Здесь каждая клетка представляет собой 2 единицы, а треугольник в полклетки — единицу. Поскольку слагаемые нечетные, каждая строка кончается скошенной линией; поскольку все слагаемые различные (и нарисованы в порядке убывания), правые края строк расположены “лесенкой”. Число n — площадь диаграммы (считается, что площадь квадратика равна 2), число слагаемых в разбиении — число строк.

Возьмем теперь две таких скошенных диаграммы общей площадью n, причем таких, что одна содержит на i строк больше другой. Перевернем вторую диаграмму и приложим к первой, как на рис. 3. После этого удалим заштрихованный треугольник. Нетрудно видеть, что площадь удаленного треугольника равна i^2, а площадь того, что осталось, равна $n - i^2$. При этом оставшаяся часть представляет собой диаграмму (обыкновенную, не скошенную) разбиения числа $n - i^2$ в сумму четных слагаемых. $\square$

Заменим теперь в формуле Якоби $q \mapsto t^{3/2}$ и $z \mapsto -t^{1/2}$. Тогда в левой части получится $\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k t^{(3k^2+k)/2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(t^{(3k^2-k)/2} + t^{(3k^2+k)/2})$, а в правой $\prod_{m=0}^{\infty}(1 - t^{3m+3})(1 - t^{3m+2})(1 - t^{3m+1}) = \prod_{m=1}^{\infty}(1 - t^m)$. Тем самым мы получили еще одно доказательство формулы Эйлера.

Сделаем в формуле Якоби еще одну замену: $q \mapsto t^{5/2}$ и $z \mapsto -t^{1/2}$ (результат нам понадобится позднее). При этом получится в левой части $1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(t^{(5k^2-k)/2} + t^{(5k^2+k)/2})$, а в правой $\prod_{m=0}^{\infty}(1 - t^{5m+5})(1 - t^{5m+3})(1 - t^{5m+2})$, иными словами,

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(t^{(5k^2-k)/2} + t^{(5k^2+k)/2}) = \prod_{\substack{m \text{ дает при делении на 5} \\ \text{остаток 0, 2 или 3}}} (1 - q^m)$$